REMat
Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional São Paulo

Uma possibilidade de uma educação metamatemática trabalhando com o teorema da incompletude de Gödel

Rosemeire de Fatima Batistela[1]
Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS

Maria Aparecida Viggiani Bicudo[2]
Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro/SP – UNESP - Rio Claro

RESUMO

O objetivo deste artigo é expor compreensões e possibilidades de trabalhar com professores em forma/ação durante o curso de graduação em licenciatura em Matemática, enlaçando-os em discussões que foquem temas importantes da Matemática, da Educação Escolar, da complexidade da Educação e da Educação Matemática. Assumimos que a abordagem de questões filosóficas pertinentes à Matemática e à conduta dos professores de Matemática são vitais para a forma/ação dos estudantes de cursos de licenciatura em Matemática. Afirmamos que é preciso que os estudantes se deem conta do que falam, quando falam de Matemática e de produtos matemáticos, bem como possam compreender o que significa transpor o conhecimento matemático, com seus valores de certeza e de exatidão, implícitos à produção desse conhecimento, para outras realidades não matemáticas, como as econômicas, políticas e sociais. Para explicitar nossas argumentações tomamos como material a ser entendido e questionado o *teorema da incompletude de Gödel*, focando-o como um exemplo de realizar a possibilidade de uma educação metamatemática, em cursos de forma/ação de professores de Matemática, focando as perguntas acima mencionadas.
Palavras-chave: Teorema da Incompletude de Gödel; Forma/ação de Professores; Educação Matemática.

A possibility of a metamathematical education working with the Gödel's incompleteness theorem

ABSTRACT

The purpose of this paper is to expose understandings and possibilities of working with teachers in being in action of formation during their undergraduate course in Mathematics, by enmeshing them in discussions that focus on important issues in Mathematics, School, Education, the complexity of Education, and Mathematics Education. We assume that addressing philosophical issues pertinent to mathematics and to the conduct of mathematics teachers is vital to the action of being in formation of undergraduate mathematics students. We claim that it is necessary for students to realize what they are talking about when they talk about mathematics

Submetido em: 29/06/2022 **Aceito em:** 20/12/2022 **Publicado em:** 01/01/2023

[1] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro/SP (UNESP - Rio Claro), 2017. Professora Adjunta da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), Departamento de Ciências Exatas, Área de Educação Matemática. Feira de Santana, Bahia, Brasil. Endereço para correspondência: Avenida Transnordestina, s/n, Novo Horizonte, CEP: 44036-900, Feira de Santana, BA, Brasil. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2779-7251. E-mail: rosebatistela@uefs.br.
[2] Professora Titular de Filosofia da Educação Matemática. Livre docente em Filosofia da Educação pela Universidade Estadual Paulista, campus de Araraquara (UNESP -Araraquara), 1978. Professora e pesquisadora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP - Rio Claro. Rio Claro, São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Av. 24 A, n. 1515, Bela Vista, CEP: 13506-900 - Rio Claro, SP – Brasil. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3533-169X. E-mail: mariabicudo@2gmail.com

and mathematical products, as well as to understand what it means to transpose mathematical knowledge, with its values of certainty and exactitude, implicit in the production of this knowledge, to other non-mathematical realities, such as economic, political, and social ones. To make our arguments explicit we take Gödel's incompleteness theorem as material to be understood and questioned, focusing it as an example of realizing the possibility of metamathematics education, in mathematics teacher education courses, focusing on the questions mentioned above.
Keywords: Gödel’s Incompleteness Theorem; Being in action of formation; Mathematics Education.

Una posibilidad de una educación metamatemática trabajando con el teorema de incompletitud de Gödel

RESUMEN

El objetivo de este artículo es exponer entendimientos y posibilidades de trabajo con docentes en forma/acción durante la licenciatura en Matemáticas, vinculándolos en discusiones que enfocan temas importantes en Matemática, Educación Escolar, la complejidad de la Educación y Educación Matemática. Asumimos que el abordaje de las cuestiones filosóficas relevantes para las Matemáticas y la conducta de los profesores de Matemáticas son vitales para la forma/acción de los estudiantes en los cursos de Licenciatura en Matemáticas. Afirmamos que es necesario que los estudiantes se den cuenta de lo que hablan cuando hablan de Matemáticas y productos matemáticos, así como que sean capaces de comprender lo que significa transponer el conocimiento matemático, con sus valores de certeza y exactitud, implícita en la producción de este conocimiento, a otras realidades no matemáticas, como la económica, la política y la social. Para explicar nuestros argumentos, tomamos como material para ser entendido y cuestionado el teorema de incompletitud de Gödel, centrándonos en él como un ejemplo de realización de la posibilidad de la educación metamatemática, en los cursos de formación de profesores de matemáticas, centrándonos en las preguntas antes mencionadas.
Palabras clave: Teorema de incompletitud de Gödel; Formación/acción docente; Educación Matemática.

INTRODUÇÃO

É comum, em cursos de formação de professores de Matemática, haver o estudo das teorias matemáticas mediante apresentação de demonstrações sem a obrigatoriedade de discussões sobre o conhecimento matemático ali tratado. Isso não quer dizer que o estudo das teorias e respectivas aplicações estejam livres desses debates. Significa, sim, que os estudantes não terão oportunidade de tomar ciência dessas discussões as quais, caso fossem obrigatórias, seriam elaboradas e conduzidas sistematicamente para a Educação Matemática desses alunos em forma/ação[3]. Esse modo de proceder evidencia que as ideias sobre o conhecimento matemático não serão abordadas pelo curso no âmbito de um currículo que visa, em princípio, o melhor para cada aluno. Evidencia, ainda, que essas discussões estarão à mercê do acaso, das variações culturais locais do país, de determinações socioculturais, políticas e econômicas etc., não sendo realizadas de modo tematizado.

Assumimos que a abordagem de questões filosóficas pertinentes à Matemática e à conduta dos professores de Matemática são vitais para a forma/ação dos estudantes de cursos

[3] Esse constructo será esclarecido no presente texto.

de Licenciatura em Matemática. É preciso que os alunos se deem conta do que falam, quando falam de Matemática e de produtos matemáticos, bem como possam compreender o que significa transpor o conhecimento matemático, com seus valores de certeza e de exatidão, implícitos à produção desse conhecimento[4], para outras ciências não matemáticas, como as econômicas, políticas e sociais.

Esses temas não são passíveis de serem abordados isoladamente, porém é preciso que sejam articulados de modo interdisciplinar. Essas articulações devem expor o entrelaçamento do tratado na região de inquérito da Educação Escolar, da Educação, da Educação Matemática e da Matemática. É preciso, também, trabalhar de modo articulado e interdisciplinar no âmbito da própria região de inquérito. No caso da ciência Matemática[5], entendemos e advogamos que os conteúdos específicos, tidos como importantes para que os estudantes constituam[6] e produzam conhecimento sobre essa ciência, sempre solicitam um pensar analítico e reflexivo sobre: o que diz o tema estudado? Quais ideias essenciais de Matemática subjazem a ele? Qual o alcance de suas aplicações possíveis? Como se mostram as estruturas presentes em sua produção? Como olhá-lo no seu horizonte histórico?

Em nossas argumentações tomamos como material a ser entendido e questionado o *teorema da incompletude de Gödel* focando-o como um exemplo de realizar a possibilidade

[4] Na perspectiva fenomenológica a produção do conhecimento se dá na esfera da intersubjetividade, em que os sujeitos em comunidade partilham compreensões explicitadas, ou seja, os sentidos que para eles foram se fazendo, compreendidos e expressos mediante a linguagem. Esta carrega consigo os significados histórico-sócio-culturais presentes no mundo. O dito nesses significados é dinamicamente atualizado no movimento de manutenção, repetição e modificação acionado nas atividades realizadas pelos membros da comunidade e em comunidade. Assim, os diferentes sujeitos, realizando atividades, repetindo os modos característicos e preconizados de um trabalho específico, mantendo e modificando os significados compartilhados produzem o conhecimento que se materializa nas diferentes modalidades possíveis e que estão à disposição no mundo-da-vida, ou seja, nesse em que todos vivemos de modo mundano.

[5] Por "ciência Matemática" estamos nos referindo à ciência que vem sendo produzida e estabelecida desde Euclides, com aplicação à Física mediante o trabalho de Galileu que possibilitou sua ampliação e aplicabilidade para outras áreas do conhecimento humano. Trata-se do conhecimento que se embasa na lógica da civilização europeia e que dá sustentação inclusive, hoje, às pesquisas das diferentes áreas realizadas no mundo todo, bem como à tecnologia. Ela trata com objetos ideais construídos mediante um processo de idealização. Não é o único modo de produzir conhecimento matemático, com base nas ações que se encontram à base do processo de idealização da ciência. Há outros, mas que não trazem a lógica da constituição e produção das idealidades. Fique claro que, no expresso nesta nota, não carrega consigo julgamento de valor, como melhor ou pior; tão somente expõe o que se quer dizer com o termo e pontua diferenças.

[6] A filosofia Husserliana entende que a constituição do conhecimento é epistemologicamente diferente de produção do conhecimento. Dos modos pelos quais Husserl, em sua obra, explicita o fazimento de sentidos no sujeito, que sente em seu corpo-vivente e as maneiras de o sentido ir sendo articulado no movimento de vivências e de busca por compreender o que dizem e, de modo inteligível e dizer por meio da linguagem, compreendemos que o conhecimento é constituído na dimensão da subjetividade e produzido na dimensão da intersubjetividade. A constituição do conhecimento, de acordo com Bicudo e Afonso da Silva (2018) "é um movimento que, pelo entrelaçamento dos sentidos experienciados no corpo-próprio ou corpo-encarnado, pelos diferentes órgãos, como audição, tato, visão, paladar, olfato e um sexto, cinestesia (movimento sentido), que vão se amalgamando e possibilitando a percepção de um objeto e sua forma em termos de figura e fundo, o qual se presentifica no fluxo da consciência. Esta, pelos seus atos, como perceber, comparar, gostar, rejeitar, expressar, comunicar, flui no movimento de articular os sentidos vivenciados pelo sujeito histórico-sócio-culturalmente situado junto ao mundo-vida e de expressar esse logos que diz de uma reunião articulada do sentido-percebido-compreendido-interpretado pela linguagem aos outros cossujeitos que junto a ele estão compartilhando e materializando as compreensões havidas." (p. 157).

de educação metamatemática, em cursos de forma/ação de professores de Matemática, focando as perguntas acima mencionadas.

As compreensões que expomos neste artigo, foram possibilitadas por meio da análise fenomenológica dos trabalhos escritos e das discussões havidas no âmbito da investigação que vimos realizando sobre esse tema, como constantes em Batistela e Bicudo (2018; 2019; 2020). Focaremos, no texto que articulamos: Forma/ação de professores de Matemática; Do teorema da incompletude de Gödel; Compreendendo o teorema de Gödel e evidenciando possibilidades de trabalhá-lo em projetos de forma/ação de professores que ensinam matemática; De direções e ênfases compreendidas mediante a pesquisa realizada e Uma educação metamatemática com o teorema de Gödel.

FORMA/AÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

A Educação Matemática abrange o tema *formação de professores* como uma de suas dimensões, aquela que preconiza constituir e desenvolver projetos que têm a preocupação com o modo de vir-a-ser do outro. São professores que tomam a Matemática como um conteúdo de ensino e que virão a atuar em diferentes níveis de ensino da Educação Básica e do Ensino Superior. Segundo Grando e Nacarato (2022, p. 01), quando se diz professores que ensinam Matemática está se dizendo de professores que são

> [...] Educadores de creche, pedagogos e professores de matemática e professores em diferentes modalidades da Educação Básica, como educação de pessoas jovens e adultas (EJA), educação quilombola, educação hospitalar, educação do campo, cursos técnicos e profissionalizantes. Da mesma forma, os professores e professoras do Ensino Superior que tomam a matemática como objeto de ensino também podem ser considerados professores que ensinam matemática, como professores de Cálculo, Álgebra etc. em cursos de formação de professores, ou em cursos de Engenharia, Administração etc. (GRANDO; NACARATO 2022, p. 01).

Estes professores que ensinam Matemática têm em comum cuidar do vir-a-ser dos seus alunos. Muitas vezes, estes professores se qualificam em cursos de Pedagogia, técnico ou bacharelado ou em cursos de Licenciatura em Matemática.

Neste artigo focamos a formação de professores em um curso de licenciatura em Matemática, e assumimos que, em seu ensino, cuida-se do vir-a-ser destes estudantes, organizando o ensino por meio de atividades que viabilizam "a efetivação do cuidado traduzido em *formas*, *conteúdos* e *direções* trabalhadas". (BICUDO, 1999, p. 6, grifo do autor).

A Matemática, uma importante ciência no desenvolvimento histórico cultural primordialmente do Ocidente, e atualmente do mundo todo, tanto do ponto de vista científico, como técnico e tecnológico, é tomada por nós educadores matemáticos como fim e como meio. Desse ponto de vista, é importante que os cursos de formação de professores trabalhem o domínio teórico e as ferramentas de produção de conhecimento matemático. Para além desses alvos, é importante que, ao ensinar essa ciência, nos preocupemos com o devir dessas pessoas que estão em movimento de forma/ação e que vivem em diversas comunidades e sociedades.

Em cursos de formação de professores, ao trabalharmos com ferramentas com as quais é produzido o conhecimento matemático, temos a oportunidade de também nos educarmos juntos aos estudantes, constituindo e expressando uma visão ampla da ciência Matemática. A perspectiva estabelecida por Gödel, no *teorema da incompletude*, permite trabalhar as características do conhecimento matemático produzido, evidenciando que algumas teorias transcendem o desígnio da Matemática formalizada. Temos permanecidos atentos e ocupando-nos dessa perspectiva em nosso trabalho com eles.

O *teorema da incompletude* não destrói parte alguma da Matemática já produzida e não inviabiliza a continuidade dos trabalhos dos matemáticos na produção dessa ciência, porém, ele apresenta obstáculos ao otimismo acerca do conhecimento matemático. Com o teorema de Gödel é quebrada a ideia de que essa ciência tenha condições de tudo saber, tudo provar e nada ignorar, de expor a verdade.

A criação/ampliação de um espaço para discussão do *teorema da incompletude* na Licenciatura em Matemática, seja como tema transversal ou tratado pontualmente, mostra-se, para nós, como significativo e importante. Estamos cientes que essa abordagem pode ajudar, mas, como afirma Santos (2000), as iniciativas são insuficientes, provisórias e pontuais nesse campo em que estamos, enquanto educadores matemáticos, propondo-nos a trabalhar da perspectiva da Filosofia da Educação Matemática, tratando de Lógica Matemática na formação de professores.

Damo-nos conta, dada nossa vivência com trabalhos dessa natureza, que estamos em desvantagem histórica e imersos no caldo de opiniões não convergentes com as nossas. Mas temos clareza que é preciso focar a própria produção da ciência Matemática, a filosofia que a subjaz, do que fala a Matemática, qual a concepção de verdade e de certeza com a qual trabalha, visando abrir horizontes para os alunos que ensinarão essa ciência às crianças, aos adolescentes e aos adultos. O objetivo é que em sua prática evitem criticar as transposições das teorias e certezas dessa área para outras, sem que seja realizada uma crítica analítica e reflexiva do desvio dos discursos e das afirmações proferidas. E, também, para que possam discernir o conhecimento da ciência matemática e o conhecimento matemático expresso, praticado e atualizado no mundo natural que todo e qualquer ser humano, de toda e qualquer cultura constitui e produz, estando com os outros e contextualizado histórica e socialmente. Enfatizamos que não se trata de proferir julgamento: o conhecimento da ciência é melhor e mais verdadeiro do que aquele do mundo natural. Tão somente dizemos que são diferentes e é preciso compreender essa diferença e o que diz e faz cada um da perspectiva de sua realidade e possibilidades de aplicabilidade.

Em cursos que têm por meta a formação de professores, ao se trabalhar com o *teorema da incompletude* abre-se possibilidade de os estudantes levantarem questões do ponto de vista epistemológico concernente à produção da prova desse *teorema* e da sua lógica. Os futuros professores, em nosso entendimento, precisam experienciar a imersão em discussões e debates sobre a Matemática, para além de saber como fazer o que é necessário em cada disciplina, tendo em vista sua aprovação, ou seja, suas notas.

O trabalho com temas da Filosofia da Matemática permite que os licenciandos se abram à compreensão dos significados de exatidão, de certeza e de verdade presentes nessa ciência e familiarizem-se com debates sobre o conhecimento matemático e sua produção. Entendemos que os estudantes podem compreender o modo como são produzidas as teorias matemáticas, ao serem conduzidos para experiências que solicitam deles um pensar técnico, analítico e reflexivo de/sobre algumas dessas atividades. Consideramos que estas questões, que são importantes para a Matemática e sua estrutura, podem ser trabalhadas com responsabilidade por educadores matemáticos, visando a abertura para compreensões da Matemática como uma ciência, vista em sua lógica e campo de produção, evitando que permaneçam prisioneiros de algumas de suas partes desconexas.

Entendemos o curso Licenciatura em Matemática como um *pro-jeto*, tomado aqui no sentido heideggeriano, como lançando uma ideia no horizonte do seu acontecer. A ideia: formar profissionais que ensinam Matemática, atentos à forma/ação de pessoas que vivem contextualizadamente em comunidades e sociedades organizadas. A *ideia* aqui posta de modo generalizado não é produto da intelectualidade de *um* ser pensante, mas de um grupo que está de modo responsável no movimento de realizar o *pro-jeto* a ser atualizado em um contexto histórico-político-social. Uma vez lançada, a ideia que o *pro-jeto* comporta, só acontece meio à materialidade disponível de lugares, instituições, comunidades socioculturais, conteúdos a serem ensinados e aprendidos, pessoas dispostas a ensinar e a aprender. Trata-se de uma complexidade de realidades e pessoas acontecendo junto, no movimento de vir-a-ser, sendo.

Nesse movimento de atualização do *pro-jeto* de formar professores de Matemática dá-se a forma/ação desses professores. A ideia assim lançada traz no seu horizonte a intenção proclamada de preparar profissionais professores para lançarem-se à profissão de ensinar, penetrando em um movimento de devir contínuo. Neste movimento são delineadas ideias conexas ao ser professor de Matemática. Uma vez sendo seres humanos, neste movimento atualizam a *forma* junto à materialidade disponível, mediante a ação desencadeada pela vontade de um sujeito de fazer algo na direção apontada. Assim, o ato se atualiza em um movimento de devir, sendo sempre. Esse movimento denominamos forma/ação de professor de Matemática.

O trabalho com o teorema de Gödel, em cursos de formação de professores de Matemática, abre possibilidade de os estudantes envolvidos nesse *pro-jeto* de curso, compreenderem a construção da Matemática, do ponto de vista do encadeamento lógico de uma teoria e das demonstrações no âmbito das teorias, das ideias que impelem esse encadeamento e dos aspectos da realidade (ontologia) dos objetos matemáticos.

Nossa argumentação a respeito da pertinência da aprendizagem do teorema de Gödel em cursos de formação de professores estende-se também a cursos de bacharelado em Matemática, pois embora os projetos desses cursos comprometam-se a formar pesquisadores em Matemática, além de ser importante que entendam do que estão falando, também é frequente bacharéis lecionando, em cursos de graduação a futuros pesquisadores e a futuros professores, disciplinas específicas comuns aos cursos de licenciatura e bacharelado.

DO TEOREMA DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL

Neste texto os dois teoremas serão chamados na forma singular de *teorema da incompletude* de Gödel. Contudo, esclarecemos a que se refere cada uma de suas partes. O primeiro teorema da incompletude estabelece a impossibilidade de serem demonstradas todas as proposições verdadeiras na Aritmética elementar na linguagem de primeira ordem. O segundo institui que na hipótese de a Aritmética básica de primeira ordem ser consistente, a consistência não pode ser demonstrada. Em outros termos, diz que o enunciado metamatemático "a aritmética é consistente" não pode ser demonstrado, ou seja, se a Aritmética for consistente não é possível estabelecer uma sequência de fórmulas no cálculo aritmético que seja uma demonstração dessa fórmula que representa o enunciado acima explicitado. Os teoremas de Gödel dizem respeito aos axiomas de Peano formulados na linguagem de primeira ordem e da ampliação desse sistema para uma coleção recursiva de axiomas.

Enfatizando o que afirmamos acima, o *teorema da incompletude* demonstra que na Aritmética dos Números Naturais, a teoria definida pelos axiomas de Dedekind-Peano formulados na linguagem de primeira ordem, existe uma fórmula verdadeira para a qual não existe uma demonstração de sua veracidade. Uma vez que essa fórmula verdadeira não é derivada dos axiomas da teoria, ou seja, não existe uma demonstração para uma afirmação verdadeira da Aritmética dos Números Naturais. Assim, essa proposição verdadeira não pode ser demonstrada.

O que significa encontrar essa proposição verdadeira e indemonstrável na teoria da Aritmética? Em uma teoria, as demonstrações dos teoremas são as sequências de linhas que demonstram aquela verdade, valendo-se dos axiomas e dos teoremas já demonstrados. Assim indemonstrável significa que a demonstração não é expressável no sistema, ou seja, o método matemático não possibilita apresentar esse resultado como parte do conhecimento matemático. Pode-se perguntar, então, o que é feito com essas verdades que não podem ser circunscritas pelo método axiomático formal?

A demonstração do *teorema da incompletude* utiliza a ideia da Metamatemática que vinha sendo utilizada por David Hilbert (1862 - 1943) e demais matemáticos para a construção de provas absolutas de consistência empenhando-se por obter uma completa formalização de um sistema dedutivo, distinguindo o cálculo formal e sua descrição. A demonstração do *teorema da incompletude* é feita nessa teoria, valendo-se de um mapeamento da Metamatemática na Aritmética e da Aritmética na Metamatemática, em via dupla, de modo que alguma verdade em uma teoria deveria ser na outra. Mas existe verdade sem ser demonstrada? Esse é o ponto nevrálgico que expõe a mensagem da incompletude da Matemática, ou seja, os axiomas de Peano e as regras da lógica não são capazes de prover todas as linhas de uma demonstração, em particular, da demonstração da consistência da Aritmética. Em outras palavras, a Aritmética não pode ser totalmente axiomatizada pelos axiomas de Peano. À luz desse resultado muitas áreas da Matemática não podem ter garantia absoluta que estejam livres de contradição interna. Ora, se as regras da lógica preservam as verdades do sistema de axiomas, o que dizer sobre verdades que não podem ser expressas em linguagem matemática formalizada?

É consenso que o *teorema da incompletude* interconecta Matemática e Metamatemática. Na prova do *teorema*, Gödel usa métodos da Lógica e da Matemática, a saber o teorema fundamental da Aritmética, o teorema chinês do resto (CHENG, 2021, p. 18)[7] a aritmetização, a representabilidade e a construção de auto referência, que são métodos metamatemáticos presentes na Lógica. A Metamatemática é a metodologia das ciências dedutivas. No campo de pesquisa da Metamatemática estão as disciplinas dedutivas formalizadas que são consideradas conjuntos de sentenças significativas. A educação (meta)matemática, a que nos referimos, busca destacar a importância do campo de estudo da Metamatemática não apenas para se compreender o *teorema da incompletude* senão também para se aprofundar as relações entre Matemática e Lógica.

Entendemos que, por intermédio do estudo do *teorema da incompletude*, se pode ter clareza sobre o que é tomado como Matemática e por quê. Tomamos como certo que o teorema de Gödel é um teorema portador de profundidade matemática, nos termos de CHENG (2021). Este autor explica a profundidade deste teorema de acordo com os três critérios: influência, fecundidade e unidade.

A aritmetização que Gödel utiliza na demonstração é um método em Lógica matemática de substituição de raciocínios sobre as expressões da linguagem de primeira ordem por raciocínios sobre números naturais. A substituição é construída por meio do mapeamento do conjunto de todas as expressões no alfabeto da linguagem em consideração - no *teorema da incompletude* é a linguagem da Aritmética – na sequência numérica do conjunto dos números naturais. Por meio do mapeamento as expressões são transformadas em relações e as operações em números naturais. Sob a aritmetização, todo símbolo, toda fórmula ou sequência finita de fórmulas é transformada em um número natural, o número de Gödel. A transformação é uma codificação e os números de Gödel representam informações do alfabeto da linguagem da Aritmética. Da perspectiva da aritmetização pode-se traduzir

[7] "Gödel's proof of the incompleteness theorems uses methods from both mathematics and logic. For example, in Gödel's proof, he uses the Chinese Remainder Theorem and the unique factorization in number theory, as well as some meta-mathematical methods in logic such as arithmetization, representability, and self-reference construction." (CHENG, 2021, p. 18).

declarações metamatemáticas sobre a teoria formal T em declarações sobre números naturais. Isso é possível, pois podemos compilar uma sequência finita de números naturais por um único número natural utilizando o teorema fundamental da Aritmética.

Consideremos uma fórmula $\boldsymbol{y}$ na linguagem da teoria e o número de Gödel correspondente. A incompletude de uma teoria pode ser estabelecida se existir uma sentença $\boldsymbol{y}$ na linguagem da teoria que seja independente da teoria. É revelado pelo *teorema da incompletude* a diferença essencial entre as noções de demonstrabilidade na Aritmética de Peano e verdade, no modelo padrão da Aritmética. O fenômeno da independência dos sistemas formais no nível da Aritmética mostra a limitação essencial dos sistemas contendo a Aritmética.

A sentença independente, verdadeira e indemonstrável, foi criada por Gödel por meio do método metamatemático e é artificial; não tem conteúdo matemático, ela é construída refletindo sobre um sistema axiomático, no qual as propriedades aritméticas dos números naturais são formalizadas, e não refletindo sobre as propriedades aritméticas dos números naturais. A sentença verdadeira e indemonstrável foi construída por meio de algoritmos e explicitada. Na demonstração do primeiro teorema entende-se que Gödel usa o método lógico puro e não tem relevância para a Matemática. Existe um programa de pesquisa da incompletude concreta que converge estudos para encontrar sentenças independentes com conteúdos matemáticos.

Trabalhos posteriores revelam a incompletude concreta da Matemática, ou seja, a incompletude prevalece na Matemática clássica

> Há um programa de pesquisa de incompletude concreta. Muitas sentenças aritméticas naturais independentes com conteúdo matemático real foram encontradas. Essas sentenças independentes têm um sabor matemático claro e não se referem à aritmetização da sintaxe e do predicado de provabilidade. Paris e Harrington [1977] propõem uma afirmação verdadeira matematicamente natural não provada em PA: Princípio de Paris-Harrington (PH). Após PH, muitas outras afirmações matematicamente naturais independentes de PA com conteúdo combinatório ou teórico de números foram formuladas: o princípio de Kanamori-McAloon [Kanamori e McAloon, 1987], a sentença de Kirby-Paris [Kirby e Paris, 1982], o Hercules- Jogo Hydra [Kirby e Paris, 1982], o princípio Worm [Beklemishev, 2003; Hamano e Okada, 1997], o princípio de inversão Kirby [1982], o enunciado arbóreo [Mills, 1980], o Princípio de P. Pudlák [Pudlák, 1979; Hájek e Paris, 1986], os princípios királico e régio [Clote e McAloon, 1983] (ver [Bovykin, 2006, p. 40]). Todas essas afirmações são consideradas muito mais genuínas e puramente matemáticas do que a sentença de Gödel, e revelam a incompletude concreta da aritmética de primeira ordem. (CHENG, 2021, p. 09, tradução nossa)[8]

[8] "There is a research program of concrete incompleteness. Many natural independent arithmetic sentences with real mathematical content have been found. These independent sentences have a clear mathematical flavor, and do not refer to

Segundo Cheng (2021) o programa da incompletude concreta, que busca sentenças independentes com conteúdos matemáticos, aquelas que se distinguem das sentenças metamatemáticas independentes construídas via lógica pura, tal qual a sentença criada por Gödel, tem mostrado que a diferença entre declarações metamatemáticas e a Matemática é menor do que se supunha ser. Posteriormente a Gödel, diferentes provas do *teorema da incompletude* foram realizadas por outros matemáticos e "a conexão entre diferentes campos se encontra estabelecida, a saber teoria da prova, teoria da recursão, paradoxo lógico, teoria dos modelos, complexidade de Kolmogorov" (CHENG, 2021, p. 13)[9].

É amplamente conhecida a conexão do teorema de Gödel com a ciência da computação e a indecidibilidade. Na demonstração estão presentes a aritmetização e a recursão primitiva que são os germes da ciência da teoria da computação. A teoria da incompletude está intimamente relacionada com a teoria da indecidibilidade, pois é fato que os teoremas de Gödel podem ser demonstrados em termos da indecidibilidade do problema da parada.

Após 1931 os fundamentos da Matemática foram moldados pelo *teorema da incompletude* de Gödel, estes que influenciaram o desenvolvimento da Lógica, da Filosofia, da Matemática, da Ciência da Computação teórica e outros campos de pesquisa que posteriormente foram sendo construídos. De acordo com Cheng (2021) na área de fundamentos da Matemática os seguintes aspectos evidenciam a influência do teorema de Gödel, são eles:

> (1) os teoremas da incompletude de Gödel revelam o fenômeno da independência que é comum em matemática e lógica; (2) Eles mostram certas fraquezas e a limitação essencial de um determinado sistema formal (ou o limite de prova e computação); (3) Eles revelam a diferença essencial entre a noção de "provabilidade em PA" e a noção de "verdade no modelo padrão da aritmética"; (4) Eles são um golpe para o programa de Whitehead-Russell para provar que toda matemática (ou pelo menos bastante) poderia ser derivado apenas da lógica em

the arithmetization of syntax and provability predicate. Paris and Harrington [1977] propose a mathematically natural true statement unprovable in PA: Paris–Harrington Principle (PH). Following PH, many other mathematically natural statements independent of PA with combinatorial or number-theoretic contents were formulated: the Kanamori–McAloon principle [Kanamori and McAloon, 1987], the Kirby–Paris sentence [Kirby and Paris, 1982], the Hercules–Hydra game [Kirby and Paris, 1982], the Worm principle [Beklemishev, 2003; Hamano and Okada, 1997], the flipping principle Kirby [1982], the arboreal statement [Mills, 1980], P. Pudlák's Principle [Pudlák, 1979; Hájek and Paris, 1986], the kiralic and regal principles [Clote and McAloon, 1983] (see [Bovykin, 2006, p. 40]). All these statements are thought of as much more genuinely and purely mathematical than Gödel's sentence, and reveal the concrete incompleteness of first-order arithmetic." (CHENG, 2021, p. 09).

[9] "For example, for the proof of G1, we also have examples of proofs which are non-constructive, proofs having the Rosser property, and proofs without the use of arithmetization.22 Thirdly, these different proofs establish the connection among different fields: proof theory, recursion theory, logical paradox, model theory, Kolmogorov complexity, etc." (CHENG, 2021, p. 13).

> seus três volumes Principia Mathematica; (5) Eles têm profunda influência no desenvolvimento do programa de Hilbert. (CHENG, 2021, p. 08, tradução nossa)[10]

A respeito do impacto do teorema de Gödel, Feferman (2006) expõe:

> Sua relevância para a lógica matemática (e seus descendentes na teoria da computação) é primordial; além disso, sua relevância filosófica é significativa, mas de qualquer forma está longe de ser estabelecida; e, finalmente, sua relevância matemática fora da lógica é muito infundada, mas é objeto de esforços contínuos e tentadores. (FEFERMAN, 2006, p. 434, tradução nossa).[11]

É claro para nós que as implicações do resultado não atingem a prática matemática, porém, a atitude da comunidade na acolhida do resultado evidencia que escolhas são necessárias e que a Matemática não é o que se pensava que fosse até este teorema.

COMPREENDENDO O TEOREMA DE GÖDEL E EVIDENCIANDO POSSIBILIDADES DE TRABALHÁ-LO EM PROJETOS DE FORMA/AÇÃO DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

A relação entre Matemática e Lógica, que se manifesta no método axiomático formal, permeando todas as teorias matemáticas estudadas em cursos de graduação em Matemática, pode também ser tratada por meio da exploração da demonstração de Gödel, visando trabalhar os fundamentos lógicos do conhecimento matemático.

O método axiomático remonta-se à sistematização da Geometria de Euclides, apresentada na Antiguidade. O método e a Geometria euclidianos, foram tomados, no século XVI, para o estudo da Física, quando se estendem para o estudo de outras áreas do conhecimento e, a partir do século XIX, esse método foi reformulado, mediante o apoio da Álgebra. É chamado, atualmente, de "método axiomático formal" e permeia as teorias matemáticas atuais, dando ênfase à lógica subjacente e à linguagem em que elas são expressas. A relação íntima entre Matemática e Lógica se manifesta nas duas partes - ou dois teoremas de Gödel – claramente diferenciadas do *teorema da incompletude.*

[10] "(1) Gödel's incompleteness theorems reveal the independence phenomenon which is common in mathematics and logic; (2) They show certain weaknesses and the essential limitation of one given formal system (or the limit of proof and computation); (3) They reveal the essential difference between the notion of "provability in PA" and the notion of "truth in the standard model of arithmetic";8 (4) They are a blow to Whitehead–Russell's program for proving that all mathematics (or at least quite a lot of it) could be derived solely from logic in their three-volume Principia Mathematica; (5) They have profound influence on the development of Hilbert's program." (CHENG, 2021, p. 08).

[11] "Their relevance to mathematical logic (and its offspring in the theory of computation) is paramount; further, their philosophical relevance is significant, but in just what way is far from settled; and finally, their mathematical relevance outside of logic is very much unsubstantiated but is the object of ongoing, tantalizing efforts." (FEFERMAN, 2006, p. 434).

É amplamente sabido que a Matemática, sua produção e seu ensino foram influenciados mais intensamente pelas três correntes filosóficas – Intuicionismo, Formalismo, Logicismo. Segundo Snapper (1984), o Formalismo de Hilbert é o que mais se destaca e foi, dentre as correntes das três escolas, a mais afetada pelo resultado do teorema aqui tratado. De acordo com Wittman, “Embora o sonho de Hilbert tenha explodido já em 1930, quando Gödel provou seu *teorema da incompletude*, o cenário formalista do programa de Hilbert sobreviveu e se transformou em uma teoria implícita de ensino e aprendizagem” (WITTMAN, 2001, p. 6, tradução nossa).[12]

Nas atividades que desenvolvemos junto aos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, já mencionado, destacamos a emergência de filósofos e lógicos da matemática buscando resolver os problemas com os quais os matemáticos estavam trabalhando. Expusemos que a Lógica Matemática, enquanto área de pesquisa, não era socialmente determinada, porém trabalhava e se apoiava em objetos ideais, que se caracterizam por serem determinados por método específico, trabalhado e produzido por Euclides, com base na Lógica Aristotélica. Gödel, ao demonstrar o *teorema da incompletude*, expõe a cisão entre Lógica Matemática e Matemática. Segundo Lannes (2014) com este resultado essa área foi socialmente determinada.

A obra *O teorema de Gödel e a hipótese do continuum* de Gödel e Paul Cohen iluminam essa separação e a torna plausível. A cisão se reflete em alguns aspectos, como: na classificação das áreas de conhecimento, a Lógica Matemática vista como uma subárea da Filosofia. Com essa concepção, começam a existir congressos e revistas especializadas em cada uma das áreas. Grupos de pesquisa e Programas de Pós-Graduação são organizados separadamente, bem como, em universidades brasileiras concursos para a contratação de docentes para trabalhar com Lógica são abertos e realizados junto à área da Filosofia.

O trabalho direcionado para evidenciar a distinção entre *verdade* e *demonstrabilidade* tem sido nossa opção em consequência de ter se mostrado difícil a compreensão de que as verdades indemonstráveis coexistem na Matemática com os teoremas e com os problemas resolvidos e a serem resolvidos. Conforme exposto em Batistela e Bicudo (2019), ao trabalharmos com os alunos o que diz e faz o teorema de Gödel, a

[12] “Although Hilbert's dream burst already in 1930 when Gödel proved his incompleteness theorem, the formalistic setting of Hilbert's programme has survived and turned into an implicit theory of teaching and learning”. (WITTMAN, 2001, p. 6).

aceitação ingênua a respeito da soberania da Matemática que evidenciam é abalada e instaura-se a possibilidade de eles manterem-se em busca de mais compreensões. Pelas exposições, expostas em Batistela e Bicudo (2019), entendemos que os professores em forma/ação passam a compreender que na Matemática sempre há conhecimento sendo buscado e construído e que a incompletude mostra uma debilidade contornável e possível de ser enfrentada mediante outros resultados matemáticos. Esse ponto é nevrálgico e dele vertem afirmações como as apresentadas na próxima seção, entre outras, que não condizem com a natureza da Matemática.

Entendemos que na medida em que o professor de Matemática compreende as potencialidades e as limitações do pensar matemático, ele pode se despir de crenças arraigadas no que concerne à Matemática ser superior às demais áreas do conhecimento, na avaliação generalizada na sociedade a respeito da superioridade do professor de Matemática em relação aos professores das demais disciplinas escolares. Conforme compreendemos do estudo que realizamos, os alunos se dão conta de que seu modo de trabalhar e a atitude assumida com os alunos podem gerar um ensino de Matemática que segrega, caso mantenha a crença na hegemonia da Matemática.

No item a seguir trazemos dados e análises da investigação que realizamos junto aos alunos da disciplina que lecionamos no curso de Licenciatura em Matemática, em uma Universidade brasileira, qual seja, a Universidade Estadual de Feira de Santana.

DE DIREÇÕES E ÊNFASES COMPREENDIDAS MEDIANTE A PESQUISA REALIZADA

Temos desenvolvido desde 2017 um projeto de pesquisa para investigar o sentido que faz para os estudantes de um curso de licenciatura em matemática o conhecimento do *teorema da incompletude* de Gödel. Trabalhamos com eles esse teorema, enfatizando as ideias filosóficas nele implícitas, no que concerne à Matemática. Destacamos, nas discussões havidas, como a visão de mundo de uma ciência matemática incompleta pode interferir em suas concepções sobre o conhecimento matemático e na sua prática como educadores matemáticos. Solicitamos aos alunos que escrevessem a respeito do seu entendimento das discussões havidas. Para tanto, pusemos a pergunta: *Como compreendem a importância de conhecerem um teorema que não vão ensinar nas escolas*? Nossa intenção era que, ao voltarem-se sobre o que estavam compreendendo, expressassem suas ideias. Esses trabalhos constituíram os dados de nossa investigação e foram analisados e interpretados sob a ótica da Pesquisa Qualitativa, na vertente hermenêutica-fenomenológica, conforme explicitada em Bicudo (2011).

Nossas análises apontaram que eles se deram conta que até então, no andamento do curso de licenciatura, não haviam entendido a razão pela qual deviam cursar disciplinas que não abordam, diretamente, tópicos tratados na Educação Básica. Alguns expressam o entendimento de que um professor precisa conhecer mais do que os alunos a respeito do que vão ensinar, outros explicitam angústia durante disciplinas em que não percebem conexão com a Educação Básica. Estes costumam considerar desnecessários certos assuntos e expõem o desejo de uma licenciatura que ensine a ensinar os conteúdos da escola daquele nível de ensino. São poucos os que percebem a formação como possibilidade de mudança na visão de Matemática e, consequentemente, de mudança de como assumi-la e apresentá-la na Educação Básica.

É comum, na prática que vivenciamos ao trabalhar com alunos de cursos de Matemática, depararmo-nos com alunos que se encantam ao conhecer de onde veio uma determinada fórmula ou operação, aquele *truque* que ele sabia fazer, mas não sabia por que funcionava. Entendemos, nessa prática, que eles valorizam os conhecimentos explicativos sobre tais procedimentos e sobre aplicações dos conteúdos no cotidiano. Vemos que esse modo de agir tem predominado na visão de professores em início de carreira, quando entendem que as explicações contextualizadas em ambientes socioculturais mostram para os seus alunos a *utilidade* dos assuntos matemáticos no dia a dia e nas demais ciências, expondo o entendimento de que para eles, o sucesso junto aos alunos, depende de saber *explicar* de onde veio e de como *utiliza* tal assunto.

Entendemos que, muitas vezes, quando há preferência explícita em trabalhar apenas com a contextualização social dos conteúdos, esse aspecto é enaltecido, obscurecendo ou encobrindo a realidade da ciência Matemática. Somos de parecer que esse modo de proceder, presente já na condução de muitas disciplinas da própria Licenciatura, *exclui* alunos da possibilidade de compreender do que a Matemática fala e porque ela se mostra fundante para a produção e aplicação das ciências, em diferentes áreas e em diferentes partes do mundo, portanto em diferentes culturas, sustentando, inclusive, todo o avanço tecnológico.

Nas discussões em torno do ensino do *teorema da incompletude* de Gödel com os estudantes na referida disciplina, foi posta sob discussão se se deve ou não trabalhar com demonstrações ao ensinar na Escola Básica. Um estudante se expressa, no trabalho que produziu, "*Há também a dúvida da necessidade de se demonstrar tudo aos alunos da educação básica. O teorema de Gödel mostra e faz refletir que algumas coisas não há necessidade de formalização*" (*estudante A*). De acordo com nossa leitura interpretativa do dito por ele, ele entendeu que a incompletude do teorema de Gödel significa não ser necessário formalizar tudo, o que sugeria, para ele, conforme entendemos, que não precisava trabalhar com demonstrações no Ensino Fundamental e Médio. Sua resposta evidencia que está a caminho de não expor as características e abrangência da ciência matemática, ao ensiná-la.

Isso fortalece a atitude de negar ao aluno a possibilidade de conhecer modos de produzir matemática e, mais do que isso, de compreender do que se fala, quando se fala em *exatidão* na ciência matemática. Compreensão essa que abre horizonte para que se entenda que não é possível expandir e transpor a *verdade da ciência matemática* para outros modos humanos de conhecer, nem para outras dimensões da realidade, como a político-social.

As respostas dos alunos evidenciam que ficaram perplexos ao entenderem que a Matemática não tem resposta para tudo, mesmo no âmbito de suas teorias. Essa compreensão nos mostra que o caminho aberto, com a discussão da teoria aqui em pauta, é promissor.

Ao mesmo tempo essas respostas revelam dúvidas e compreensões impróprias no tocante à ciência Matemática. Isso é preocupante, pois estão sendo formados professores de Matemática que não têm ideia do que trata a ciência Matemática, do que faz e de como é produzida. A seguir, trazemos afirmações que permaneceram caladas durante a realização das atividades nesse curso e que foram explicitas no trabalho escrito, aqui sob análise.

O *estudante B* assim se expressa: "*É importante poder mostrar aos alunos que por mais exata e precisa que ela seja ainda é passível de erros*." Isso nos sinaliza que precisamos avançar as discussões e ficar atentos aos pontos que indicam obstáculos epistemológicos, buscando fortalecer estudos e discussões que possam contribuir com esclarecimentos. Nas discussões havidas durante o curso da disciplina *Evolução da Matemática* com a qual trabalhamos, o *estudante C* afirma "*um teorema é verdade até que alguém prove o contrário ou prove outra coisa*", revelando incompreensão da ciência Matemática e de como ela é produzida.

As afirmações dos alunos e o silêncio dos demais frente às falas dos colegas, em nossa compreensão, evidenciam que o tema solicita abordagens mais esclarecedoras. Neste caso, a respeito de como os objetos matemáticos passam a existir e de a Matemática buscar ser livre de contradições. O *estudante D* afirma "*Gödel demonstrou que a sentença é indemonstrável, mas não é absolutamente indemonstrável (mas só no contexto) e pode vir a ser demonstrada já que a Matemática está em construção*". Ficam claros aspectos em sua afirmação que estão em conflito e que solicitam desconstrução para que confusões desse tipo não afetem outras pessoas. O mesmo se dá na declaração do *sujeito E*: "*gostei bastante de conhecer esse teorema e compreendi sua explicação. Porém é difícil aceitar, pelo menos para mim, que nem todo teorema da matemática pode ser provado. É difícil de aceitar que algo, até então, perfeito tenha uma falha como essa*". O *estudante F* assevera: "o *teorema de Gödel ajuda os professores na hora de sanar as dúvidas dos alunos sobre "detalhes" que não são provados e que devem ser aceitos como verdade*". Fica evidente que ele se equivoca com o significado de haver proposições verdadeiras que são indemonstráveis.

Não assumimos a visão de que somente pessoas geniais podem compreender e aprender a ciência Matemática. Essa ciência é fruto do conhecimento humano e é produzida em um contexto sócio-político-cultural. Portanto, está aí, no mundo em que existimos com os outros, para ser compreendida, produzida, aplicada, com o cuidado para que não seja assumida e entendida como soberana em relação a todo e qualquer conhecimento humano. Há que ser compreendida da perspectiva do que faz e, dessa perspectiva, há que ser entendido o seu alcance e aspectos positivos.

Sendo assim, ao mesmo tempo em que se trabalha de modo comprometido com o modo de essa ciência ser produzida e aplicada, há que se trazer à cena dos debates com os estudantes a ideologia da certeza e da exatidão que incautos propagam, transpondo afirmativas própria à Matemática e à sua região de inquérito, para outras, de modo naturalizado. Isto é, é preciso proceder à crítica da certeza, não da ciência Matemática, olhada em seu escopo, mas a da certeza politicamente expandida e proclamada, chamando como referência a ciência Matemática, para outras esferas da realidade sociocultural.

A formação inicial de professores é um *lócus* apropriado para que se trabalhe com esse conhecimento e com a crítica do uso de suas afirmações para realidades outras, que não a da Ciência Matemática.

Opomo-nos à uma Educação Matemática que negue ao aluno a possibilidade de compreender essas questões. Sendo Educação, há que se ouvir e trabalhar com o aluno. Há assuntos que requerem mais atenção, mais disciplina de trabalho do que outros. Se não compreendemos bem o dito pelo aluno, estudemos, analisemos, reflitamos. Somente assim a forma/ação do professor se dá – a nossa e a do estudante.

Compreendemos que a compreensão do significado da existência do *teorema da incompletude* nos obriga a abrir mão da ilusão da perfeição dessa ciência, da ilusão do controle e da domesticação das verdades segundo o método axiomático formal. As vivências de estranheza e do desconforto dos estudantes com a incompletude sinaliza para nós um caminho promissor.

UMA EDUCAÇÃO METAMATEMÁTICA COM O TEOREMA DE GÖDEL

Em nosso entendimento, a matemática, trabalhada como disciplina obrigatória do currículo escolar, sendo ensinada a todos os alunos desde os anos iniciais de escolarização, tem praticado a segregação e a separação: bons, competentes, ruins e incompetentes. Entretanto, estamos cientes de que não se pode negar a ciência Matemática, seu modo de ser produzida e aplicada e enaltecer o conhecimento natural[13]. De nossa perspectiva, é preciso tanto que compreendemos a lógica da produção do conhecimento matemático e de sua aplicabilidade, quanto criticá-la. A crítica deve incidir na crença propagada e fortalecida na sociedade de ser ela considerada como pilar de sustentação de parâmetros políticos, éticos e estéticos e como provedora de verdade a respeito da vida e do mundo.

Por meio do trabalho com o resultado do *teorema da incompletude* demo-nos conta de podermos efetuar um movimento de busca pela clareza da Matemática, focando o solo em que este teorema se estabeleceu. Abriram-se horizontes para que se pudesse trabalhar, de modo apropriado, o método axiomático formal, ao mesmo tempo em que realizamos um pensar filosófico, indagando pelo modo como a comunidade matemática conceitua verdade nessa ciência e não perdendo de vista indagações sobre que sentidos são produzidos pelo ensino de Matemática que praticamos.

[13] O conhecimento que se inicia e permanece na experiência é dito conhecimento natural e a intuição doadora é percepção. Na Matemática, todas as sentenças corretas correspondem à certas intuições em que objetos se doam naturalmente. Segundo Husserl a característica principal da ciência é "uma unidade arquitetônica formada por um elo sistemático entre proposições (*Sätze*) e justificações (*Begründungen*) ... segundo a ordem natural das coisas e justificativas, segundo a estrutura cognitiva do campo de investigação". (ALES BELLO, 1986, p. 122, tradução nossa).

Em Batistela, Lima e Oliveira (2021) afirmamos que, por meio do trabalho com o *teorema da incompletude* de Gödel, podemos tratar com aspectos que evidenciam que a Matemática pode se questionar a si própria e provocar debates que desenvolvam uma visão integrada das várias áreas do conhecimento matemático. Nas atividades realizadas, foram postos questionamentos provocando a compreensão de que o conhecimento matemático é um constructo sociocultural e histórico e de que o método de produção da Matemática não produz verdades para tudo o que existe.

O direcionamento que tem sido dado à disciplina *Lógica Matemática e Teoria dos Conjuntos*, conforme em Batistela, Lima e Oliveira (2021) tem em vista possibilitar

> Que o futuro professor de matemática tenha condições de fazer escolhas mais significativas em relação à organização de uma temática de ensino ou de um curso. Ainda, pode permitir a esse futuro professor de matemática entender as estruturas de ensino propostas, apropriando-se delas em sua prática conforme as suas próprias concepções. (BATISTELA; LIMA; OLIVEIRA, 2021, p. 173-174).

Embora não tenhamos mensuração das consequências desse trabalho, a ressonância desse posicionamento na prática docente dos professores alinha-se ao que sugerimos com o teorema de Gödel e alimenta nossa proposta na medida em que entende que o professor, ao ensinar essa ciência, utiliza o método axiomático e suas escolhas devem incluir no horizonte de possibilidades mais do que somente a lógica da melhor exposição com a justificação formal.

O *teorema de Gödel* permite o entendimento de que o rigor matemático atende a um critério de escolha, ou seja, alguns instrumentos de produção matemática estão sendo selecionados em detrimento de outros. O ensino do *teorema da incompletude* na licenciatura, ao tratar das relações entre Matemática e Lógica, teve como objetivo: apresentar e propor experiências que levem os estudantes a compreender a relevância deste teorema no desenvolvimento de novos métodos e novas formas de pensamento na Matemática Moderna; focar a mudança que ele provocou na concepção sobre o conjunto dos conhecimentos matemáticos e consequentemente à concepção da própria Matemática. Isso transcende o conhecimento de seu enunciado e requer que o trabalho compreensivo possibilite encontros com aspectos do resultado que poderão incidir em níveis de conhecimento dele. Ao nosso ver, a apresentação das relações intrínsecas entre a Matemática e a Lógica pode ocorrer por meio do estudo da versão ilustrativa da prova original de Gödel apresentada em Batistela (2017). Trata-se de um exercício em Filosofia da Educação Matemática com professores, o qual busca se opor àquele ensino que somente destaca o sistema axiomático formal sem refletir sobre ele e coaduna com aquele que procura explorar e problematizar a concepção de Matemática e o processo de produção dos objetos matemáticos. Ao mesmo tempo, busca manter o objetivo de que os professores compreendam *porque* o *teorema da incompletude de Gödel* foi demonstrado, que ideias, processos e significados possibilitam e justificam a existência deste teorema.

A proposta que apresentamos de trabalhar o alargamento e aprofundamento desse teorema e das ideias filosóficas que vêm com ele, vale-se da crítica da prática de ensino predominante em cursos de Matemática, aquele que dá preferência ao Estruturalismo e ao Formalismo e, por meio dessa crítica, desenvolver o exercício em Filosofia da Educação Matemática com o objetivo de possibilitar que os alunos compreendam que a comunidade matemática tem, em seu interior, um problema fundamental, que é decidir o que fazer com as verdades que não cabem no método de que se valem.

Nós temos presenciado, na experiência de trabalho com o *teorema da incompletude*, que por meio desse resultado é possível a tomada de consciência por parte dos licenciandos a respeito da incompletude da Matemática e da importância que este resultado possui, na medida em que ele produziu na própria Matemática uma mudança na concepção dela própria sobre o alcance em termos de verdade e demonstrabilidade.

Ao assumirmos essa proposta pelas vias formais podemos produzir reflexões sobre a concepção de Matemática em que estão imersos os professores de Matemática e, assim, podemos modificá-la, uma vez que, na cultura vigente, a visão de Matemática é formalista e estruturalista e a visão após o *teorema de Gödel* expõe o alcance da Matemática evidenciando limites ao formalismo e diferenciando verdade matemática de *demonstrabilidade.*

No entendimento que, na dimensão escolar, os professores de matemática, com o ensino que praticam, mobilizam o conhecimento matemático existente e são agentes de um discurso sobre a Matemática, é possível e desejável abrir possibilidades para que os estudantes se abram à compreensão da Metamatemática por meio do trabalho com o *teorema da incompletude,* focando as relações entre Matemática e Lógica. A compreensão de a inevitabilidade da incompletude do conhecimento matemático estar presente no próprio campo da Matemática pode conduzir alunos e professores a se questionarem a respeito das práticas que realizam. Ao proceder desse modo, entendemos que estamos interferindo no discurso sobre a Matemática que os professores de matemática mobilizam no âmbito do ensino que praticam, abrindo, dessa maneira, sua prática para o que denominamos de educação (meta)matemática.

REFERÊNCIAS

ALES BELLO, A. **Husserl e le scienze**. Roma: la goliardica editrice universitaria di Roma, 1986.

BATISTELA, R. F. **O Teorema da Incompletude de Gödel em cursos de licenciatura em Matemática.** 2017, 140 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2017. https://repositorio.unesp.br/handle/11449/148797

BATISTELA, R. F.; BICUDO, M. A. V. The Importance of Teaching Gödel's Incompleteness Theorem in Mathematics Teacher Education. **Philosophy of Mathematics Education Journal**, v. 33, p. 1-13, 2018. http://socialsciences.exeter.ac.uk/education/research/centres/stem/publications/pmej/pome33/Batistela%20&%20Bicudo%20%20%20The%20Importance%20of%20Teaching%20Goedels%20Incompleteness%20Theorem.docx

BATISTELA, R. F.; BICUDO, M. A. V. O que diz o teorema da incompletude de Gödel para licenciandos em matemática. **Educere et Educare**, *[S. l.]*, v. 14, n. 33, p. 1-24, 2019. https://doi.org/10.17648/educare.v15i33.22511

BATISTELA, R. F.; BICUDO, M. A. V. Gödel's incompleteness theorem in mathematics teacher formation courses: previous possibilities. **Mathematics Teaching Research Journal**, Special Issue on Philosophy of Mathematics Education, v. 12, n. 2, 2020. https://commons.hostos.cuny.edu/mtrj/wp-content/uploads/sites/30/2020/09/v12n2-Godel-s-incompleteness-theorem.pdf

BATISTELA, R. F.; LIMA, E. B.; OLIVEIRA, M. L. C. A Constituição dos Saberes de Lógica na Formação de Professores de Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana. **ALEXANDRIA: R. Educ. Ci. Tec**., v. 14, n. 2, p. 161 – 170, 2021. https://doi.org/10.5007/1982-5153.2021.e75183.

BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Ed. UNESP, 1999.

BICUDO, M. A. V. (Org). **Formação de professores?:** da incerteza à compreensão. Bauru: EdUSC, 2003.

BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa Qualitativa segundo a visão fenomenológica**. São Paulo: Cortez, 2011.

BICUDO, M. A. V. ; AFONSO DA SILVA, A. Análise de descrições de vivências em situação de constituição de conhecimento. *In*: COSTA, A. P.; SÁNCHEZ-GÓMEZ, M. C.; CILLEROS, M. V. M. (Org). **A prática na Investigação Qualitativa**: exemplos de estudos, v. 2. Aveiro: Edição Ludomedia. Disponível em:

https://ludomedia.org/publicacoes/a-pratica-na-investigacao-qualitativa-exemplos-de-estudos-vol-2-2/. Acesso em 15 dez. 2022.

CHENG, Yong. On the Depth of Gödel's Incompletness Theorems. **Philosophia Mathematica**, nkab034, 2021, p. 1-27. https://doi.org/10.1093/philmat/nkab034

FEFERMAN, S. The Impact of the Incompleteness Theorems on Mathematics. **Notices American Mathematical Society**, 53(4), 434-439. 2006. http://math.stanford.edu/~feferman/impact.pdf

GRANDO, R. C.; NACARATO, A. M. Perspectivas para a formação de professores que ensinam matemática. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis, Ed. Especial: Pesq. Form. Prof. Ens. Mat, p. 01- 09, jan./dez., 2022. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2022.e86497

LANNES, W. Sobre as implicações do Teorema de Gödel na organização social de Matemáticos e Lógicos no Século XX. In: **XIV Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia.** Anais, Belo Horizonte, MG. 2014. https://www.14snhct.sbhc.org.br/arquivo/download?ID_ARQUIVO=1919

SANTOS, Boaventura Sousa. **A crítica da razão indolente:** contra o desperdício da experiência. 1. ed. São Paulo: Editora Cortez, 2000.

WITTMANN, E. Ch. Developing Mathematics Education in a Systemic Process. **Educational Studies in Mathematics**, v. 48, n. 1, 2001, p. 1-20. https://www.jstor.org/stable/3483113