ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 13, número 15, 2011

COMPARAÇÃO ENTRE DUAS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS SOBRE ENSINO INTRODUTÓRIO DE ÁLGEBRA

COMPARISON BETWEEN TWO DIDACTIC SEQUENCES ABOUT LEARNING INTRODUCTORY ALGEBRA

Eveline Vieira Costa - Depto. de Educação/UFRPE
Eveline_costa@uol.com.br

RESUMO: Este estudo teve como objetivo investigar eventuais diferenças em resoluções de equações e problemas algébricos do primeiro grau, em função de uma sequência didática proposta com uma balança de dois pratos como um artefato didático no processo de construção da equivalência algébrica e da compreensão do conceito de incógnita. Para tanto, dois grupos foram constituídos: o Experimental, submetido à referida sequência; e o Controle, submetido à metodologia habitualmente usada. A comparação entre o pré-teste e o pós-teste, intra e inter grupos, tanto nas equações, como nos problemas, indicaram que o grupo submetido à sequência proposta, utilizando a balança de dois pratos, obteve um desempenho significativamente melhor no que diz respeito ao procedimento algébrico. Este resultado sugere ser este artefato cultural, juntamente com a sequência apresentada, um facilitador para a compreensão do sinal de igual e sua implicação para a ministração desta disciplina científica.
Palavras-chave: Álgebra elementar. Equivalência algébrica. Balança de dois pratos. Didática da matemática. Educação matemática.

ABSTRACT: The purpose of this study was proceed an evaluation of eventual performance differences on algebraic problems and equations solving skills in function of a didactic sequence for introduction to the elementary algebraic conceptual field of action, utilizing a balance scale as a teaching artifact in the process of sense construction on the algebraic equivalence principle. For that, two groups were constituted: Experimental, submitted to the referred didactic sequence, and Control, submitted to the usual mathematics works proposed by the school. The data, before and after tests, had shown, in terms of exams hits rate profile, that Experimental group had a better performance in terms of algebraic procedure as much in equation as in problems. These results suggest that the utilization of the balance scale and the referred sequence can bring benefits to the comprehension of equal sign and its implications bringing helps to the ministration of this scientific discipline.
Keywords: Elementary algebra. Equivalent algebraic. Balance scale. Didactic of mathematic. Mathematics education.

Considerações iniciais

Muitos estudos têm sido feitos no contexto de sala de aula a respeito da prática do dia a dia do professor de matemática, resultado de um movimento no ensino, advindo da reforma educativa datada dos anos 60, que ocorreu na área da didática, nos Institutos de Investigação acerca do Ensino das Matemáticas (IREM), criados na França. Diante do tempo decorrido destes estudos; tantas pesquisas feitas; e tanta compreensão dos processos por que passam os alunos podemos ainda nos perguntar por que os alunos ainda têm dificuldades para aprender? (GROSSI, 2003). Estes estudos abarcam uma verdadeira cooperativa teórica, da qual fazem parte diversos autores como, Piaget, Vergnaud, Brousseau, Chevalhard e Douady, entre os mais conhecidos. Esta cooperativa teórica nomeia-se Teoria das Situações Didáticas (TSD). Este trabalho tem como fundamentação esta perspectiva.

Para a TSD, o ensino e a aprendizagem são parte da situação didática que é bastante complexa. Para considerar todas as variáveis da situação didática, a TSD considera uma abordagem relacional, em que o processo é representado como um triângulo, no qual cada vértice representa, respectivamente, o PROFESSOR, como agente transmissor do conhecimento e organizador do saber; o ALUNO, como aquele que passa pela experiência de aquisição de novos conhecimentos; e a especificidade do CONTEÚDO a ser transmitido. Esta situação criada por estes três elementos que a compõem é permeada pelo tempo da aprendizagem.

O conteúdo com o qual o aluno entra em contato na sala de aula é o resultado de um longo percurso; desde o saber historicamente consagrado, objeto de publicações científicas, até o saber escolar. Este processo que o saber percorre é gerador de deformações, de esfacelamentos, de simplificações, de recortes, a fim de facilitar sua enunciação como programa escolar, e sua apropriação pelo aluno. Chevallard (1985) afirma que este processo, a *transposição didática*, requer que o saber seja descontextualizado e recontextualizado, quando em uso. Ele é descontextualizado, quando o professor em sua exposição, generaliza o saber, abstraindo-o das condições particulares que lhe deram origem, integrando-o a modelos coerentes, a fim de explicitar os conceitos subjacentes a ele relacionados. Ele é recontextualizado, quando, por seu turno, o aluno lhe atribui um significado (ou sentido) específico, dentro da gama de conhecimentos que já possui, de forma a integrá-lo.

A relação professor-aluno leva ao *contrato didático* (BROUSSEAU, 1996). A idéia é de que existem regras e regulamentos que regem as instituições sociais e consequentemente as relações estabelecidas entre o professor e o aluno que pré-existem a esta relação. Este tipo de contrato didático não é, na maioria das vezes, explicitado na situação didática, mas tem forte influência sobre o processo de ensino-aprendizagem. Este contrato implícito muitas vezes só é posto em evidência quando é transgredido, seja pelo professor, seja pelo aluno. Este contrato, que não é negociado pelo processo, pode causar inúmeras resistências em ambas as partes, principalmente por parte do aluno, traduzindo-se em dificuldades na aprendizagem. A proposta da TSD é a negociação deste contrato que tem sempre por objetivo um alvo a ser atingido: a aquisição de um novo conhecimento. Este contrato deve ser renegociado cada vez que é atingido um alvo (parte do contrato), delimitando etapas do processo. Ele define implícita ou explicitamente as regras de funcionamento dentro da situação, como a distribuição de responsabilidades; determinação de prazos para diferentes atividades; permissão ou proibição do uso de determinados recursos de ação; etc. Diferentes ações foram discutidas e negociadas com os alunos como parte do contrato didático estabelecido, que veremos na descrição da sequência proposta.

A relação aluno-conteúdo leva à noção de *campos conceituais* de Vergnaud (2003, 1997, 1992). Campo conceitual é definido por Vergnaud (2003, 1997, 1992) como um conjunto de situações cuja manipulação requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas interligadas entre si. Segundo este teórico não se pode falar em aprendizagem no infinitivo, mas de aprendizagem da matemática, aprendizagem de física, e assim por diante. Mais especificamente, para ele é ainda inadequado falar da aprendizagem da matemática, devendo-se pensar em um campo conceitual restrito dentro da matemática, como a álgebra que se relaciona, por sua vez, com outros campos conceituais, como as estruturas aditivas; as estruturas multiplicativas, etc. Sobre um campo conceitual, faz-se necessário conhecer os invariantes lógicos que o constitui, além disso, tal campo conceitual deve ser apresentado ao aluno a partir de uma classe diversificada de representações que requerem os invariantes em questão. Estas representações são consideradas em toda a sua complexidade como uma combinação de tarefas apresentadas ao aluno, cuja natureza e obstáculos devem ser bem conhecidos pelo professor. Com base no conhecimento da construção do saber pelo aluno, e no conhecimento da complexidade das tarefas propostas em sala de aula, surgiu a noção de engenharias didáticas, próprias a cada campo conceitual, que tem por objetivo criar tarefas (etapas), em uma *sequência didática*, para levar o aluno a superar os *obstáculos didáticos* (BACHELARD, 1996) relacionados à construção do conhecimento. Neste trabalho propomos uma sequência didática a fim de vencer os obstáculos relativos à álgebra elementar.

Estudos no campo conceitual da Pré-álgebra ou, álgebra elementar

Coxforde, A. F & Shulte, A. P. (1995); Lins, R. C. & Gimenez, J. (1997) afirmam que a álgebra é um campo conceitual bastante complexo. O problema que se impõe é a preocupação em realizar uma didática de sala de aula rica em problemas, cujos conteúdos sejam significativos para o aluno, isto é, uma didática que trabalhe com problemas concretos. Eles partem do princípio de que se deve ensinar a álgebra através da modelização de problemas; da generalização de problemas, etc. Problemas do dia a dia podem ser fonte de problemas concretos. Também o campo de experiência dos números naturais ou das figuras geométricas, podem se tornar a fonte de problemas concretos, dependendo da experiência dos estudantes. Ainda outra possibilidade mais recente é o uso dos objetos de aprendizagem (instrumentos computacionais) no estudo da álgebra (NUNES, 2005; HAN; CHANG, 2007; CASTRO-FILHO et al., 2003).

Boero (1996) faz uma distinção entre duas situações: i) aquela nas quais se apresentam problemas diários em diferentes domínios, a fim de proporcionar significados específicos quanto ao conteúdo; ii) aquelas nas quais se escolhe um campo de experiência e o torna objeto de uma investigação sistemática em sala de aula. Segundo ele, no primeiro caso, os estudantes tentam transferir, analogicamente, a experiência com um problema, para outros problemas, ou a estrutura matemática organizada na situação anterior, para outra situação. O fracasso neste processo muitas vezes não deixa alternativa para o estudante, e, nestes casos, torna-se difícil apreender o significado da ajuda dada pelo professor. Por outro lado, quando os alunos se deparam com o segundo tipo de situações, ou seja, com um aprofundamento em um campo de experiência, os problemas são levados a um nível mais profundo de exploração, levando à compreensão das noções subjacentes por trás da resolução de problemas. A sequência que será descrita se enquadra dentro do segundo tipo de situação.

Alguns autores chamam a passagem de uma resolução aritmética para uma resolução propriamente algébrica, a passagem de uma operação processual para uma operação estrutural (KIERAN, 1992). Segundo a autora, se exige do aluno um processo rápido de passagem entre a aritmética para a álgebra que levou séculos para se concretizar na história: em aritmética, a meta é encontrar a solução de uma série de operações de um lado e apresentar o resultado do outro lado do sinal de igual. Por outro lado, a equação algébrica é uma representação estrutural que envolve uma nova maneira de representar o sinal de igual, como a equivalência de operações em ambos os lados do sinal. Em Kieran (1995) a autora argumenta que a passagem aritmética/álgebra demanda um tempo considerável longo, e que os alunos deveriam ir se familiarizando com estas duas disciplinas a fim de compreender a diferença entre as duas formas de procedimentos.

Com o objetivo de levar os estudantes a conceber equações (do tipo $ax \pm b = cx \pm d$) como relação de equivalência de operações, mudando a noção do sinal de igual, Kieran (1981) realizou uma experiência com 6 alunos de 12 a 13 anos, na qual pediu para os estudantes criarem *identidades aritmética* com uma operação de cada lado; com duas operações; e depois com várias operações com ambos os membros da equação. Em seguida, ela trabalhou sobre estas *identidades aritméticas*, pedindo aos sujeitos para substituir um dos números por um quadrado, e finalmente por uma letra. Em todo o processo ela solicitava ao aluno para justificar o sinal de igual. Segundo ela, esta tarefa favorece uma mudança da concepção do sinal de igual como um símbolo que separa *resultado*, para uma concepção de um símbolo que separa *operações*. No primeiro caso o *processo aritmético*, notadamente quando auxiliado por máquina de calcular; no segundo caso, o *processo algébrico*, com uma visão do sinal como um conector de operações equivalentes.

Os métodos utilizados para resolver equações que têm sido apresentados em diferentes pesquisas são classificados por Kieran (1992) como: i) *uso de fatos numéricos* ($2 + x = 5$, sabe-se que $2 + 3 = 5$); ii) *técnica de contagem* ($2 + x = 5$, conta-se 2, 3, 4, 5 e nota-se que é preciso 3 para chegar a 5); iii) *cover up* ($2x + 9 = 5x \therefore 9 = 3x$, porque $2x + 3x = 5x$, assim, $x = 3$); iv) *trabalhar de frente para trás* ($2x + 4 = 18 \therefore 2x + 4 - 18 = 0$); v) *ensaio-e-erro*; vi) *transposição* (mudança de lado/ operação inversa); vii) *realização da mesma operação em ambos os lados da equação*.

Os últimos dois métodos têm sido considerados métodos formais, sendo a transposição considerada uma abreviação da mesma operação em ambos os lados da equação. No entanto, o método da transposição, preferido pelas escolas, não leva à noção da equação como um objeto matemático, pois usando este método, os alunos estão apenas aplicando uma regra: mudança de lado, mudança de sinal. Em Kieran (1992) encontramos estudos que mostram que os estudantes tendem a manipular equações sem pensar, automaticamente, usando a regra de mudança de lado, mudança de sinal. Tais estudantes não revelam conhecimento da estrutura subjacente à manipulação que eles realizam.

Wheeler (1996) tem observado, no comportamento dos estudantes, como a aritmética e a álgebra parecem ser dois sistemas isolados. Acredita que o desafio da aula é não apenas construir conexão aritmética/álgebra, mas também vivenciar a conexão álgebra/aritmética, ou seja, desenvolver a habilidade de mover para trás e para frente o processo de ensino, entre a concepção processual e a concepção estrutural.

Preliminarmente, quando a álgebra é introduzida para resolver problemas aritméticos, ela é usualmente vista como mais complexa pelos alunos do que a solução aritmética, porque nas expressões mais simples do tipo $a + x = b$; $ax = b$ e $ax + b = c$, a solução algébrica não oferece benefício óbvio. No entanto, a álgebra, por ser um instrumento poderoso, deve ser vista como um caminho para resolver problemas que não poderiam ser facilmente resolvidos pela aritmética. Enquanto na solução de problemas aritméticos o aluno se utiliza de conhecimentos implícitos, *teoremas em ação* (VERGNAUD, 1988) e não se dá conta deles; na solução algébrica existem regras e algoritmos (ou quase-algoritmos) explícitos com os quais o aluno se depara, que consistem em relações entre valores conhecidos e desconhecidos. No entanto, ao se deparar com operações em ambos os membros da equação há três dimensões a ser consideradas: i) explícito/implícito; ii) linguagem simbólica/linguagem natural; iii) algoritmos/heurísticas. No entanto tal passagem não pode ocorrer sem que se introduzam conceitos poderosos como: incógnitas e equações; variáveis e funções; sistemas de equações, etc.

Neste trabalho nos preocupamos em como o aluno concebe problemas que levam à generalização (a álgebra compreendida como uma generalização da aritmética); em como o aluno modela equações com base em situações-problema na balança; em como o aluno formula equações criadas a partir de problemas próximos, e posteriormente distantes da situação da balança; passando pela volta à criação de expressões aritméticas, trabalhando a substituição de números por letras e trabalhando a noção do sinal de igual; e por fim, em como o aluno aprende a resolver as equações anteriormente modelizadas.

Trabalhos com a balança de dois pratos como suporte instrucional

Diversos autores têm enfocado atividades matemáticas envolvendo o uso da balança de dois pratos, seja em termos de análise etnográfica voltada para a atividade natural de compra e venda em feiras livres, ou como ferramenta auxiliar no âmbito de iniciativas didáticas de introdução à álgebra elementar (FILLOY; ROJANO, 1984, 1985, VERGNAUD; CORTES, 1986, CORTES; VERGNAUD; KAVAFIAN, 1990, CARRAHER; SCHLIEMANN, 1988, SCHLIEMANN; SANTIAGO; BRITO LIMA,

1992, MEIRA, 1996, DA ROCHA FALCÃO, 1995, DA ROCHA FALCÃO et al., 2000).

Nas situações especificamente didáticas, a balança tem sido usada por alguns dos autores como, por exemplo, Filloy e Rojano (1985). Os autores realizaram entrevistas pedagógicas em três classes de sala de aula, com alunos de 12 a 13 anos que já sabiam resolver equações do tipo $x \pm a = b$ e do tipo $ax \pm b = c$, que chamaram *equações aritméticas*; mas que ainda não haviam aprendido equações do tipo $ax \pm b = cx$, nem do tipo $ax \pm b = cx \pm d$, que chamaram *equações algébricas*. Os autores mostraram que o uso da balança e o modelo de área geométrica não foram suficientes no sentido de proporcionar aos sujeitos meios para que eles operassem ao nível simbólico, em equações com duas incógnitas. Os alunos produziram os conhecidos erros de confundir coeficientes com incógnitas, e, além disso, tiveram dificuldades em abandonar os modelos prévios e de relacioná-los com operações algébricas.

Ao contrário, Vergnaud e Cortes (1986) e Cortes, Vergnaud e Kavafian (1990) argumentaram que a apresentação de situações-problema, usando a balança de dois pratos é extremamente útil para a introdução da álgebra, auxiliando o aluno a vencer dois obstáculos que interferem significativamente na compreensão da álgebra na escola: i) a operação sobre incógnitas; ii) a utilização de uma noção de equilíbrio experienciada pela balança, que pode ser transposta para equações, ajudando na distinção dos significados anteriormente atribuídos pelos alunos ao sinal de igual. Neste estudo, o uso da balança foi utilizado no primeiro ano da pesquisa apenas para a introdução à álgebra, já que uma das limitações da balança é não lidar com soluções negativas. O obstáculo didático que os autores perceberam foi a concepção de que o sinal de menos se refere a uma subtração de uma quantidade positiva, e não à inversão de um número positivo, com base na equivalência algébrica. Para apresentar problemas de soluções negativas, onde as incógnitas são resultados de transformações, relações ou coordenadas, os autores utilizaram o modelo de mudança de temperatura. Esta mudança do modelo para cada situação indica que a balança é um dos recursos válidos para a compreensão de alguns aspectos do campo conceitual algébrico, tais como equivalência e incógnita, mas seu uso é restrito apenas a estas situações.

Reconhecendo as limitações do uso da balança, Da Rocha Falcão (1995), propôs, uma sequência didática que teve como objetivo trabalhar sobre os *teoremas-em-ação* (VERGNAUD 1988) dos sujeitos relativos à noção de equivalência dos "pesos" na balança, tal qual é vivenciada no dia-a-dia. Diversamente da proposta piagetiana, que vê a função simbólica e as ferramentas culturais como subordinadas às estruturas operatórias, recorreu a (VERGNAUD, 2003, 1997, 1992, 1988), que vê nas ferramentas culturais, nos contextos de atividades específicas e nas representações simbólicas, um papel constitutivo no desenvolvimento cognitivo, constituindo-se tais metáforas, como a da balança, em "pontes" entre conceitos espontâneos e científicos (VYGOTSKY, 1984). No entanto, deve-se ressaltar que para o autor o uso da metáfora é limitado, devendo ser abandonada tão logo cumpra sua função, dado que os amplificadores culturais nesta situação (no caso, a balança) não são a coisa real em si, mas andaimes cognitivos (DA ROCHA FALCÃO, 1995).

A conclusão em relação à utilidade do uso da balança é que ela é um recurso didático, dependendo do uso que dela se faça nas atividades de sala de aula. Estudos mostram que ela é útil para trabalhar a noção da equivalência entre os membros da equação, e consequentemente, ampliar o conceito do sinal de igual como uma relação (a ser mantida) e não como um resultado de um cálculo aritmético; além de favorecer ao aluno lidar com valores desconhecidos, isto é, incógnitas (CARRAHER; SCHLIEMANN, 1988, SCHLIEMANN; SANTIAGO; BRITO LIMA, 1992, VERGNAUD; CORTES, 1986, CORTES; VERGNAUD; KAVAFIAN, 1990, DA ROCHA FALCÃO, 1995, DA ROCHA FALCÃO et al., 2000). Ainda, a balança é um instrumento capaz de trabalhar a modelização de problemas concretos, visando situações próximas e distantes da pesagem na balança real. Enfim, permite trabalhar noções de equilíbrio e de incógnitas, constituindo-se numa ponte entre o conhecimento espontâneo, que é construído, alheio ao currículo escolar, e o conhecimento formal, que se desenvolve dentro do currículo oficial na escola (VYGOTSKY, 1984).

O problema que nos colocamos neste trabalho foi saber se a exploração da atividade do aluno abordando alguns pontos (noção de equivalência e de incógnita) realçados pelos diversos professores/pesquisadores em relação ao estudo da álgebra com a balança de dois pratos -- ao contrário de um ensino/aprendizagem formal usual -- proporciona diferenças sistemáticas ou não casuais, verificadas no resultado do processo. Para tanto, tivemos o cuidado de controlar as variáveis do processo possíveis de serem controladas. O objetivo foi verificar, ao fim do processo, o *procedimento* (Costa, 1988) adotado para a resolução de equações e problemas A hipótese de trabalho foi de que os alunos do grupo experimental adotariam um procedimento mais algébrico do que o grupo controle.

A sequência didática proposta

Baseada em Da Rocha Falcão (1993; 1995; 1996) e descrita em Costa (1998), a sequência didática utilizou a balança de dois pratos, sacos de alimentos e pesos de diversos quilos e gramas. Além disso, foram utilizadas folhas próprias para exercícios denominadas: *representação gráfica da balança, representação gráfica da equação, representação gráfica do sinal,* como suportes didáticos. O objetivo foi facilitar a compreensão do sinal de igual não como um resultado, mas como uma operação; assim como a transposição das situações propostas na balança para o papel, ao mesmo tempo, enfatizando a noção de incógnita, e não desprezando a equivalência algébrica. A sequência proposta transcorreu a partir de etapas que serão resumidas a seguir:

ETAPA 1 - O objetivo desta etapa foi criar uma situação de compra e venda na feira, na qual a experimentadora era a vendedora e criava cenas didáticas (onde um aluno era chamado a participar), apresentando situações na balança, que iam sendo representadas conforme o problema proposto. Nesta etapa foi estabelecido o *contrato didático* (BROUSSEAU, 1996), cujo objetivo era tirar pesos iguais em ambos os pratos para a balança permanecer em equilíbrio, com o objetivo de descobrir o valor dos sacos de alimentos apresentados em seis situações:

SIT 1 - Márcio (nome do aluno que representou a cena) foi à feira comprar um saco de feijão para sua mãe. Quanto pesava este saco?
Representação proposta pela examinadora na balança: a = x, onde a = 1 Kg e x = um saco de feijão conforme a figura 1:

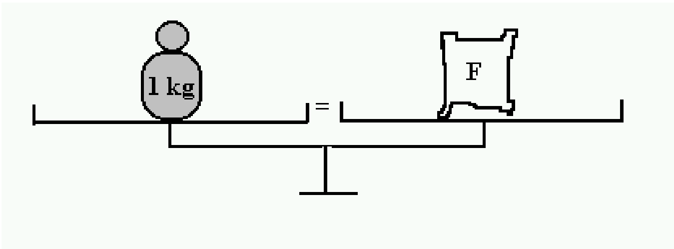

Figura 1: primeira situação apresentada na balança

Aqui se instaura a situação canônica, de maneira que, se o aluno parte do conhecimento da noção de equilíbrio na balança, saberá que o saco de feijão em um prato da balança pesa tanto quanto o peso no outro prato.

SIT 2 - A mãe de Marcelo (nome do aluno que representou a cena) pediu para ele comprar um saco de arroz para ela. Sua tia aproveitou a oportunidade e pediu para que ele comprasse um saco idêntico para ela também. Quanto pesava cada saco de arroz?
Representação proposta pela examinadora na balança: a = 2x, onde a = 2 Kg e x = um saco de arroz conforme a figura 2.

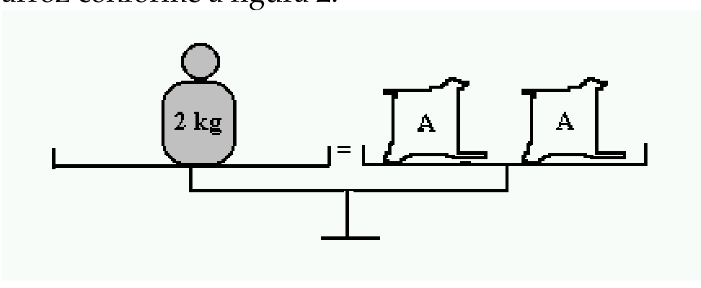

Figura 2: segunda situação apresentada na balança

Nesta situação, além do *teorema-em-ação* (VERGNAUD, 1988) relacionado à noção de equilíbrio na balança, a criança precisará utilizar o esquema das estruturas multiplicativas simples de proporcionalidade, para deduzir o peso de um saco, a partir do conhecimento do peso dos dois sacos.

SIT 3 - Antônio (nome do aluno que representou a cena) foi ao mercado comprar um saco de sal para sua mãe. Quanto pesava o saco de sal?
Representação proposta pela examinadora na balança: a = x + b, onde a = 500g e b = 200g x = um saco de sal conforme a figura 3:

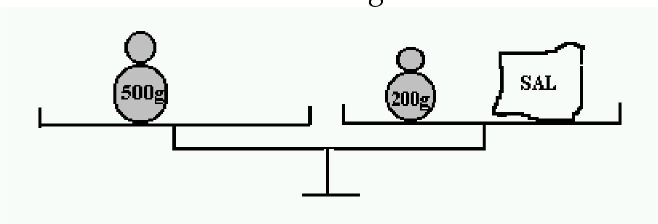

Figura 3: terceira situação apresentada na balança

Nesta representação instaura-se uma situação diferente daquela encontrada nas feiras livres, onde o saco de alimento que se quer conhecer o peso coloca-se lado a lado com um peso de 200g. Antônio argumentou que a experimentadora estava roubando, pois estava acrescentando 200g ao peso do alimento e podia cobrar mais pelo sal do que o que ele realmente pesava. Neste caso, a examinadora tirou as 200g do lado do saco de sal e perguntou se a balança se mantém em equilíbrio. Ao ser respondido que não, perguntou: "se estivesse em equilíbrio quanto pesaria o saco de sal?". Ao ser respondido 500g, perguntou se o sal pesa mais ou menos que 500g. Os alunos responderam que o sal pesa menos. A pesquisadora perguntou, então, qual seria a solução, e os alunos responderam que seria necessário encontrar um peso do mesmo peso do saco de sal, e passaram a procurá-lo entre os pesos existentes, um que satisfizesse a condição. Em não encontrando (esta não equivalência entre o peso do saco de sal e um peso, é proposital), e confrontados com a necessidade de resolver o problema, a examinadora levou-os a pensar, se tirando 200g dos 500g do peso dado, poder-se-ia saber quanto valia o saco de sal. Os alunos fizeram as contas de cabeça e acharam o valor de 300g. Os alunos deram um passo cognitivo importante, no sentido da realização de operações mentalmente, em cima da hipótese de subtração necessária para restaurar o equilíbrio na balança.

SIT 4 - Fulano (nome do aluno que representou a cena) estava em casa, quando todas as suas três irmãs resolveram comer pipoca. Cada uma pediu para ele comprar um saco de pipoca para ela. Quanto pesava cada saco?
Representação proposta pela examinadora na balança: a + x = 2x, onde a = 100g e x = um saco de pipoca conforme a figura 4.

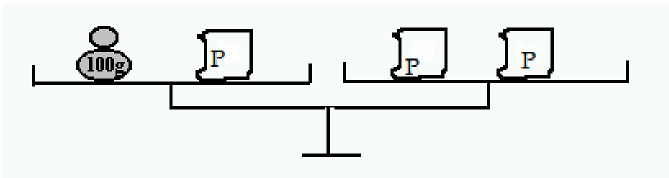

Figura 4: quarta situação apresentada na balança

Aqui um obstáculo didático se apresenta: o fato do aluno ter de eliminar de ambos os pratos um objeto de peso desconhecido e não, conhecido, como os 200g da situação anterior. A examinadora chamou a atenção para o fato dos valores desconhecidos serem idênticos em ambos os pratos da balança, isto é, os dois sacos de pipoca. Em seguida perguntou se tirando um saco de pipoca de um lado e do outro, a balança permaneceria em equilíbrio. Como os alunos responderam que sim, acredita-se que eles deram um passo no sentido de realizar operações com incógnitas.

SIT 5 - Seu Manoel resolveu comprar três sacos de açúcar para dar às suas três filhas. Quanto pesava cada saco de açúcar?
Representação proposta pela examinadora na balança: a + x = b + 2x, onde a = 50g , b = 20g e x = um saco de açúcar conforme figura 5.

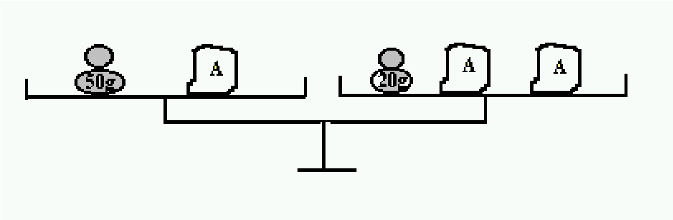

Figura 5: quinta situação apresentada na balança

Nesta situação e na seguinte, os dois obstáculos didáticos anteriores (SIT 3 e 4), estão presentes numa mesma situação, ou seja, a necessidade de realizar uma operação mental de subtração de 50g menos 20g, e a necessidade de operar mentalmente com valores desconhecidos (incógnitas) na operação.

SIT 6 - A mãe de Cláudio (nome do aluno que representou a cena) pediu para ele comprar um saco de farinha e um saco de feijão. Sua tia pediu para ele comprar a mesma coisa para ela. Sua irmã que estava lá na sua casa também pediu para ele comprar dois sacos de farinha para ela, do mesmo peso do de sua mãe e do de sua tia. Quanto pesa cada saco de farinha?
Representação proposta pela examinadora na balança: a + x + y = x + y + 2x + b, onde a = 500g, b = 100g, x = saco de farinha e y = um saco de feijão conforme figura 6.

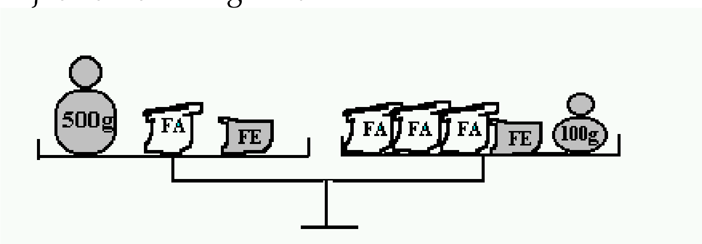

Figura 6: sexta situação apresentada na balança

Esta é a situação mais complexa apresentada. Aqui os alunos além de operar com dois valores desconhecidos (os dois sacos de farinha; dois sacos de feijão), tiveram que realizar operações de subtração mentalmente (a subtração de 500g menos 100g); e por fim, para encontrar o peso do saco de farinha, tiveram que realizar operações multiplicativas simples de proporcionalidade (dois sacos de farinha é igual a 400g, logo cada saco de farinha vale 200g).

ETAPA 2 – Esta etapa foi o primeiro passo para a habilidade da escrita algébrica. Estabelecemos o contrato didático a fim de modelizar as seis situações anteriores, em folha própria, sem, no entanto, resolvê-las.

As equações foram esquematizadas na *folha de representação gráfica da balança,* usando um símbolo qualquer para representar os sacos de alimentos, deixando-se a necessidade de representar sacos de alimentos diferentes com símbolos diferentes, e ao contrário sacos de mesmo elemento por um mesmo símbolo. Como os alunos tentaram desenhar os sacos, sugerimos que eles representassem os sacos por triângulos, quadrados e círculos. A figura 7 apresenta a representação gráfica da balança:

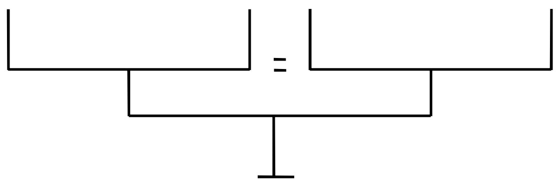

Figura 7: Representação gráfica da balança

O objetivo de levar o aluno a representar de um modo qualquer os valores desconhecidos foi compreender o caráter simbólico utilizado na álgebra, isto é, a noção de incógnita.

ETAPA 3 - Esta etapa foi realizada após análise do resultado dos trabalhos da etapa anterior. De posse destes trabalhos, a examinadora chamou alguns alunos que sentiram dificuldades no tocante à representação de valores e incógnitas a fim de modelar novamente as equações com todo o grupo, com base no acordo de utilizar figuras geométricas, para facilitar a representação simbólica da situação. Para surpresa da examinadora a maioria dos alunos criou as equações no quadro sem dificuldades. Quando mais de um aluno davam respostas diferentes, eram chamados para resolvê-las. As diferenças iam sendo trabalhadas por todo o grupo.

ETAPA 4 - Nesta etapa os alunos trabalharam com a *folha de representação gráfica da balança,* oito problemas de estrutura algébrica semelhantes às equações anteriormente esquematizadas. Foi reforçado o acordo estabelecido na ETAPA 2, ou seja, o de postergar o resultado dos problemas para outra etapa do processo. Os problemas foram copiados no quadro pela pesquisadora para todo o grupo. Abaixo segue um exemplo de problema apresentado. Observe, porém, que o problema não explicita uma pergunta, propondo, simplesmente que seja representado:

> PROB 1 - Pedro foi à feira comprar 4kg de farinha. Paulo foi também e pediu 2 sacos de arroz. Sabendo que o peso das compras de Pedro foi equivalente ao peso das compras de Paulo, represente o problema de um jeito que você ache que ajude a resolvê-lo, na folha de resposta.

Os problemas foram explorados de forma que fosse entendido que Pedro e Paulo, no caso, compraram objetos de mesmo peso e que, portanto, o peso dos objetos era equivalente e poderia se constituir cada um, em um lado da representação gráfica da balança. Além disso, a examinadora pediu para os sujeitos representarem a relação aditiva dos elementos comprados em cada lado da *representação gráfica da balança* com o sinal de *mais*.

ETAPA 5 - Nesta etapa os alunos foram levados a esquematizar em *folha de representação gráfica da equação*, cinco problemas com conteúdos semanticamente distantes da situação de pesagem na balança, não mais mencionando o contexto da feira, mas outras incógnitas criadas em outros contextos, porém que se assemelharam quanto à complexidade estrutural, pois conforme Costa (2010) o uso da balança pode se transformar em um efeito de analogia, onde, ao invés de facilitar a compreensão do assunto estudado, cria um obstáculo didático a sua compreensão. A representação gráfica da equação e um exemplo deste tipo de problemas são mostrados abaixo:

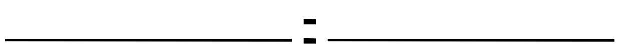

Figura 8: Representação gráfica da equação

> PROB 5 - Flora era muito vaidosa e cuidava muito bem de suas roupas. Ela tinha uma gaveta cheia de blusas que ela arrumava todos os dias. Tinha mais outra gaveta cheia de saias, e mais 5 sapatos diferentes. Daniela tinha também uma gaveta com a mesma quantidade de saias que Flora, mais 2 gavetas cheias de blusas, de mesma quantidade da de Flora. Daniela tinha ainda 3 sandálias diferentes. Sabendo que a quantidade de peças de vestuário de Flora era a mesma que a quantidade de Daniela. Represente o problema de um jeito que você ache que ajude a resolver.

Aqui o problema consistiu em diferenciar incógnitas de coeficientes. A idéia principal era fazer os alunos entenderem a semelhança entre os dados destes problemas e dos problemas representados pelo contexto da feira, compreendendo o significado de uma incógnita, como por exemplo, na explicação de que uma gaveta de meias poderia ser representada tal qual um saco de feijão, já cinco sapatos e três sandálias deveriam ser representados como números inteiros e não incógnitas, e assim por diante.

ETAPA 6 - Esta etapa foi realizada dado o fato de que os alunos cometeram erros na esquematização, como, por exemplo, representar as operações sem levar em conta o princípio de equivalência entre os membros da equação. Esta etapa teve o objetivo de levar o aluno a ver de maneira nova o sinal de igual. A examinadora pediu aos alunos para formularem no papel (representação gráfica da equação) *identidades aritméticas* de três tipos: a) com uma operação de cada lado, por exemplo, $2 \times 5 = 13 - 3$; b) com duas operações de cada lado, exemplo $4/2 + 8 - 5 = 15 + 5 - 15$; c) com mais de duas operações de cada lado, exemplo $7 \times 4 - 8 + 4 - 2 = 6 / 3 + 10 - 2 + 12$. Em seguida a examinadora pediu aos alunos que dessem seus exemplos das identidades formuladas e trabalhou a noção do sinal de igual: por que existe o sinal de igual? Após esta primeira fase, os alunos puderam ser levados a substituir alguns números de *identidades aritméticas* por letras que apareciam em um lado, ou em ambos os lados da equação, e após a substituição, foi realizado o mesmo procedimento, ou seja, os alunos deram exemplos de suas *identidades aritméticas* que foram transformadas em *identidades algébricas*, enfocando o sinal de igual ora como aquele que indica o resultado de cálculos aritméticos; ora como um conector de operações algébricas (Experiência baseada em KIERAN, 1981).

ETAPA 7: Nesta etapa os alunos esquematizaram cinco problemas apresentados e em seguida resolveram as equações, referentes a cada problema, um a um, cujos conteúdos envolviam diversos contextos. Antes, porém, foi explicitado que este assunto compreende uma introdução ao estudo da álgebra na área da matemática e como tal, possui um modo de representação própria dentro desta disciplina. Assim foi sugerido ao aluno que não mais utilizassem figuras geométricas, mas as últimas letras do alfabeto, tendo em vista que em Álgebra, o uso das últimas letras do alfabeto (x, y, z) é de uso consagrado para representar valores desconhecidos. As dúvidas que os alunos iam tendo na resolução das equações, resultantes dos problemas, iam sendo refletidas por todo o grupo a fim de criar o que Vergnaud (2003) chama de metacognição que *implica em um retorno reflexivo sobre a própria atividade e enfatiza a relação entre as propriedades do objeto e as propriedades da ação. [...] devemos ser cognitivos para dar conta de uma tarefa, e metacognitivos, para compreender o que fizemos*. (VERGNAUD, 2003, p. 25). Esta etapa foi gravada em vídeo e foi detalhadamente analisada em Costa (2010).

O emparelhamento da amostra

Este estudo contou com 38 alunos de ambos os sexos da sétima série do ensino fundamental, não iniciados em álgebra, de uma escola pública da região metropolitana do Recife. Os alunos, divididos em dois grupos, experimental e controle, eram oriundos de uma mesma sala de aula, dividida em duas, o que permitiu controlar variáveis, tais como: escola, nível de escolaridade e o professor anterior. Os alunos foram emparelhados levando-se em consideração a média final em matemática obtida na sexta série; a idade e o sexo. No grupo experimental (GE) havia sete alunos que foram reprovados na série anterior. No grupo controle (GC), apenas cinco se encontravam nesta situação. Vale ainda salientar que a média das notas das meninas era superior (6,6796) aos dos meninos (5,9636), com desvio padrão respectivos de 1,2183 e 0,6233. O número de meninas no GC foi maior que no GE, porém, foi realizado o **t-teste** que indicou que tais diferenças na constituição dos dois grupos não eram significativas, obtendo-se um **p** de 0,754[1].

O Pré-teste foi realizado em uma mesma ocasião com toda a amostra na sala de aula tradicional (incluindo os alunos que não fizeram parte do estudo) sob a intervenção da examinadora e a presença do professor, e constou de um teste com 20 equações (configuradas com quadrados representando incógnitas), de diversos níveis de dificuldades e 13 problemas de estruturas semelhantes às equações.

O resultado da comparação

O que mais nos interessou neste trabalho foi o *procedimento* adotado pelos alunos na resolução das equações e problemas. Para analisar os diferentes procedimentos foram adotadas quatro categorias: i) – *procedimento algébrico* (P-ALG), quando o aluno utilizava-se da equivalência na equação para a manipulação de incógnitas; ii) – *procedimento pré-algébrico* (P-PRÉ), onde aparecia uma forma híbrida de procedimento, algébrico e aritmético; iii) - *procedimento aritmético* (P-ARIT), quando o aluno não conseguia ver o sinal de igual como relações entre expressões de valores conhecidos e desconhecidos, e sim, como um indicador de operações; e iv) - *sem procedimento* (S-P), quando os alunos apenas davam a resposta, não importa, se errada ou certa.

[1] Tal emparelhamento foi confirmado pela análise estatística dos acertos no pré-teste, inter-grupo, submetidos ao teste U de Mann-Whitney, com $p = 0,6183$ em relação ao nº de acertos nas equações e $p = 0,1014$ em relação aos problemas

Comparação entre o pós-teste inter grupos na resolução das equações

O gráfico abaixo mostra com clareza a relação dos dois grupos quanto ao procedimento nas equações no pós-teste:

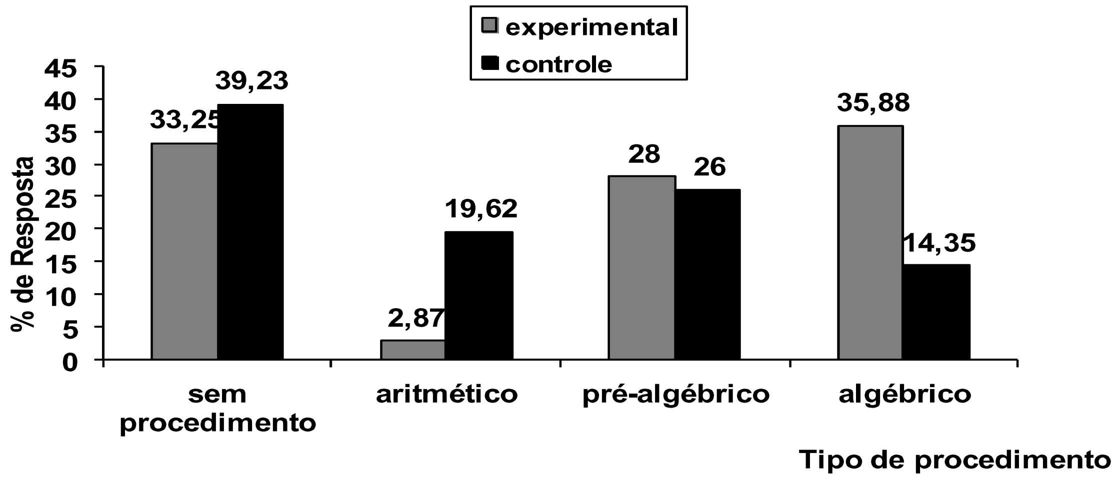

Gráfico 1: Distribuição da frequência percentual das categorias de resposta no grupo experimental e controle no pós-teste nas tarefas de resolução de **Equações**.

Devido aos cuidados no emparelhamento da amostra os dados obtidos no pré-teste foram bastante semelhantes entre os dois grupos, no entanto, com efeito, como mostra o gráfico acima, vemos que a comparação entre os *pós-testes* dos grupos (GC e GE), no que diz respeito ao tipo de procedimento nas *equações,* revelou uma diferença marcante quanto à tendência a usar no pós-teste nas equações, estratégias diferentes de resolução, apresentando o GE uma predominância de procedimento de categoria algébrica e o GC uma predominância da categoria S-P explícito. No entanto, a porcentagem de respostas na categoria S-P no GE, como salienta o gráfico, ainda foi alta, devido à diversidade própria da sala de aula.

Vale lembrar que a categorização das equações na categoria de P-ALG somente foi dada àqueles procedimentos nos quais o sinal de igual correspondia a equivalências possíveis. Todas as tentativas de manipulação algébrica que não levavam a tais equivalências foram classificadas como P-PRÉ. Nota-se um crescimento em termos de manipulação, do novo conhecimento, ou seja, o P-ALG, visto que boa parte dos alunos deixou de manipular as equações aritmeticamente e passou a usar um procedimento algebricamente coerente ou fragmentos de uma escrita algébrica (P-PRÉ). No entanto, a porcentagem alta da categoria S-P sugere, além da falta de iniciativa de utilizar qualquer um dos procedimentos, várias possibilidades: i) que a resposta às equações possam ter sido óbvias a ponto do aluno não necessitar de explicitar o procedimento; ii) uma falta de capacidade de responder a questão proposta, ou seja, a falta de compreensão, ou seja, a não aprendizagem; e iii) o aluno ter "copiado do colega" a questão, ao invés de tentar resolvê-la, como é freqüente em qualquer sala de aula.

Comparação entre o pós teste inter grupos na resolução dos problemas

A comparação entre os dois grupos nas categorias procedimentais nos *problemas* pode ser visualizada pelo gráfico 2.

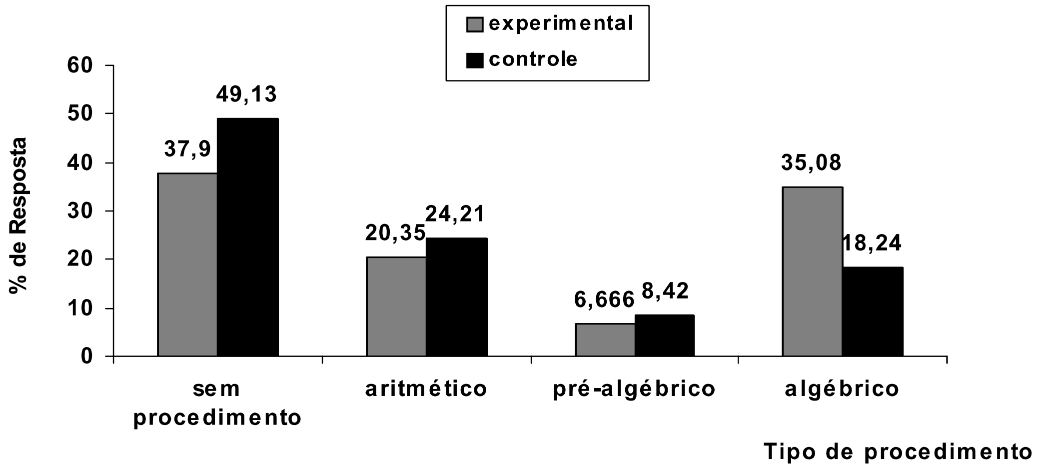

Gráfico 2: Distribuição da frequência percentual das categorias de resposta no grupo experimental e controle no pós-teste nas tarefas de resolução de **Problemas**.

No caso dos *problemas*, em linhas gerais parece que a intervenção no GC, mostrou que as respostas do tipo P-ALG e P-PRÉ somaram só 26,666 % do total e que a categoria S-P corresponde praticamente à somas das outras categorias juntas. A categoria P-ALG obteve apenas 18,24% do total de respostas.

No caso dos *problemas* no GE, ao contrário, boa parte dos alunos tenderam a usar no *pós-teste* o P-ALG, seguido do P-ARIT e do P-PRÉ, embora uma grande parte não apresentou nenhum tipo de procedimento. Assim, diferente do GC, pode-se dizer, que a intervenção favoreceu, no GE uma frequência maior de respostas na categoria de P-ALG.

Em resumo, os resultados mostraram que o GE, tanto nas equações, como nos problemas, tendeu a utilizar o tipo de P-ALG. Além disso, a percentagem de respostas com P-PRÉ também foi relativamente alta. Esta diferença mostra que o GE se distinguiu do GC em termos de procedimento de resolução nos problemas e equações propostas. O teste de aderência confirma que houve uma tendência significativa nos problemas e equações (qui-quadrado = 92,8, g. l. 3 e $p < 0{,}001$). Concordando com a expectativa do trabalho, a análise dos procedimentos mostra que houve um desempenho significativamente diferente dos sujeitos nos problemas e nas equações em termos de uma escrita algébrica no GE.

Considerações finais

Este trabalho se baseou na evidência da dificuldade oriunda da aprendizagem da álgebra elementar em alunos do ensino fundamental. A concepção que fundamentou o trabalho tem como base a deficiência no uso e na compreensão do sinal de igual, ou seja, na compreensão de igualdade entre expressões algébricas. A manipulação de mudança de lado, mudança de sinal que predomina nos cursos fundamentais, privilegia o transformismo algébrico mecânico, onde os alunos decoram esta regra de simplificação, não acompanhadas da sua significação, em termos do que seja equivalência algébrica, representada por uma nova maneira de ver o sinal de igual.

Do estudo feito pode-se concluir que o uso da balança de dois pratos é importante para estas compreensões em um primeiro momento como um artefato cultural, tornado instrucional, que permite a verificação experimental da igualdade. A ajuda na manipulação de incógnitas também pôde ser verificada, ressaltando-se que a passagem da aritmética para a álgebra e da álgebra para a aritmética, facilitou a sua compreensão. No entanto, a manipulação de operações mais complexas como a divisão e a multiplicação não é favorecida pela utilização de tal artefato.

Para tanto, é necessário o abandono deste objeto de apoio inicial a fim de levar o aluno a operações outras que não sejam o simples acréscimo ou decréscimo de objetos que envolvem apenas as operações aditivas e subtrativas.

Este abandono do artefato cultural foi realizado gradativamente, enquanto o conceito do sinal que favorece a compreensão de uma equação algébrica foi ao mesmo tempo realçado pouco a pouco, a partir das folhas que continham as *representações gráficas da balança*, as *representações gráficas das equações* e as *representações gráficas do sinal*. Com a primeira representação gráfica já tínhamos como fator de manipulação uma representação e não mais o artefato real da balança em si, o que significava o uso apenas da sua representação. Com o segundo tipo de representação, o sinal começa a ser acentuado como um conceito que liga duas retas, separadas por duas pequenas retas paralelas (o sinal de igual), sobre as quais se manipulam incógnitas, anteriormente manipuladas com o artefato cultural. Com o terceiro tipo de representação, o próprio sinal de igual se sobressai como fundamental para estabelecer uma relação de igualdade que favoreceu, com base nos dados apresentados, a manipulação simbólica.

Desta forma, os próprios recursos utilizados pela sequência proposta levam por si sós ao acompanhamento de um processo de simbolização de uma operação realizada no nível real, no contexto concreto, para outra realidade. A sequência proposta favorece esta mediação. Nela, o contexto concreto e simbólico vão se interrelacionando a ponto das operações mentais terem o auxílio apenas do sinal que evidencia uma igualdade entre elementos de duas sequências de mesmo valor. Assim, julgamos desta forma, que a sequência proposta é útil ao ensino de álgebra elementar e pode ser um bom exercício em escolas no dia a dia ao nível do ensino fundamental.

Referências

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**. São Paulo: Contraponto, 1996.

BOERO, P. Some research questions concerning the use of"real" problems in the teaching of algebra. In: T. ROJANO e L. RADFORD. Algebraic process and structure. **20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Valencia, Spain, 1996.

BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In: G. GALVEZ, G. BROUSSEAU, L. A. SANTALÓ, P. SADOVSKY & R. CHARNAY (Orgs). **Didática da Matemática: refrexões psicopedagógicas.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1996

CARRAHER, T. N. & SCHLIEMANN, A. D. Álgebra na feira? In: T. CARRAHER, A. SCHLIEMANN (Orgs). **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1998.

CASTRO-FILHO, J. A., LEITE, M.A.; FREIRE, R. S.; PASCHOAL, I.V. A. Balança Interativa: um software para o ensino da Álgebra. **Anais do XVI Encontro de Pesquisa Educacional das Regiões Norte e Nordeste - EPENN**, Aracaju, SE, 2003.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**. Brenoble, La pensée Sauvage, 1985.

CORTES, A, VERGNAUD, G. & KAVAFIAN, N. From arithmetic to algebra: negotiating a jump in the learning process. **Proceeding of the 14th International Conference Psychology of Mathematics Education.** México, 1990.

COSTA, E.V. Um estudo de álgebra elementar com balança de dois pratos. **Revista Psicologia: Reflexão e crítica,** vol 23, nº 3, 2010.

COSTA, E.V. **Ensino introdutório de álgebra elementar:** comparação entre um fragmento de sequencia usual e uma sequencia didática com balança de dois pratos para atividade em sala de aula. Recife, UFPE, 1998.

COXFORDE, A. F.; SHULTE, A. P. **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. A case study of algebraic scaffolding: from balance scale to algebraic notation. **Proceedings of the XIX th International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Vol. 2, p. 66-73, Recife, Brasil, 1995.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. A álgebra como ferramenta de representação de problemas. In: A. D. SCHLIEMANN, D. W. CARRAHER, A. G. SPINILLO, L. L. MEIRA & J. T. DA ROCHA FALCÃO (Orgs). **Estudos em psicologia da educação matemática**. Recife: Editora Universitária, UFPE, 1993.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. Proposições de sequências didáticas para o ensino de conceitos matemáticos: o caso da álgebra elementar. **VI Simpósio da ANPPEP,** Friburgo Rio de Janeiro, 1996.

DA ROCHA FALCÃO, J. T.; LIMA, A. P. B.; ARAÚJO, C.R.; LINS LESSA, M.M.; OSÓRIO, M. A. Didactic sequence for the introduction of algebraic activity in early elementary school. In: **Proceedings of the 24th International Meeting of Psychology of Mathematics Education (PME)**, Hiroshima-Japão, vol. 2, p. 209-216, 2000.

FILLOY, E.; ROJANO, T Operating on the unknown and models of teaching. **Proceedings of the Seventh Annual Meeting of PME-NA,** Columbus, OH: Ohio State University, 1985, p. 75-79.

FILLOY, E.; ROJANO, T. From an arithmetical to an algebraic thought. **Proceedings of the Sixth Annual Meeting of PME-NA).** Madison: University of Wisconsin1984, p. 51-56,

GROSSI, E. P. (Org.) **Por Que Ainda Há Quem Não Aprende?** Petrópolis: Editora Vozes, 2003.

HAN, S.; CHANG, K. P. Problem solving with a Computer Algebra System and the pedagogical usage of its obstacles. In: WOO, J. H., LEW, H. C., PARK, K. S. & SEO, D. Y. (Orgs.). **Proceedings of the 31 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education – PME 31**. Coréia do Sul, Seul, 2007, vol. 1, p. 223.

KIERAN, C The learning and teaching of school algebra. In: D. A. GROUWS (Org). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan Publishing Company, 1992.

KIERAN, C. Concepts associated with the equality symbol. **Educacional Studies in Mathematics**, 1981, v. 12, p. 317-326.

KIERAN, C. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. In: A. F. COXFORDE; A. P. SHULTE. (Orgs).. **As idéias da álgebra.** São Paulo: Atual, 1995, p. 104-110.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. São Paulo, Campinas: Papirus, 1997.

MEIRA, L Aprendizagem, ensino e negociação de significados na sala de aula. In: M. H. NOVAES E M.R.F. BRITO, Psicologia na Educação: articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica. Rio de Janeiro: Associação Nacional de Pesquisa e Pós-graduação em Psicologia. **Coletâneas da ANPEPP,** 1996, vol. 1, nº 5.

NUNES, C. Objetos de aprendizagem a serviço do professor. Entrevista publicada no site da Microsoft®. Disponível em http://www.microsoft.com/brasil/educacao /parceiro / objeto_ texto.mspx, 2005.

SCHLIEMANN, A. D., SANTIAGO, M., M., L.; BRITO LIMA, A. P. Understanding equivalences through balance scales. **Proceedings of the XVI Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Burham, New Hampshire, 1992, p. 7-14.

VERGNAUD, G.; CORTES, A. Introducing algebra to "low-level" eighth and nineth graders. In: L. STREEFLAND (Ed). **Proceedings of the 10th International Conference Psychology of Mathematics Education.** London, 1986, p. 319-324.

VERGNAUD, G. Theoretical frameworks and empirical facts in the psychology of mathematics education. In: ANN & K. HIRST (Org). **Proceedings of the International Congress on Mathematical Education**, Budalpest, 1988, p. 39-41.

VERGNAUD, G. **The theory of conceptual fields**, ICME VII, Québec, 1992.

VERGNAUD, G. The nature of mathematical concepts. In: T. NUNES E P. BRYANT (Eds.) **Learning and teaching mathematics: An international Perspective**. East Sussex: Psychology Press, 1997, p. 5-28.

VERGNAUD, G. A gênese dos campos conceituais. In: E. P. GROSSI (Org.) **Por Que Ainda Há Quem Não Aprende?** Editora Vozes, Petrópolis, 2003, p. 21-60.

VYGOTSKY, L. S. **A Formação Social da Mente**. São Paulo: Livraria Martins Fontes Editora Ltda, 1984.

WHEELER, D. (1996). Frente e para trás: Reflexões sobre diferentes abordagens para a álgebra. In: N. BEDNARZ, C. KIERAN, LEE & L. (Orgs.), **Abordagens à álgebra: Perspectivas de Aprendizagem e Ensino.** Dordrecht, Países Baixos: Kluwer Academic Publishers, 1996, p. 317-325.