



Progressão aritmética: uma proposta de ensino e aprendizagem através da Resolução de Problemas

Claudia Vieira de Vargas¹

Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Santa Maria, RS, Brasil

Fabiane Cristina Hopner Noguti²

Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Santa Maria, RS, Brasil

Resumo

O presente artigo é o recorte de uma pesquisa de mestrado, a qual investiga o ensino e a aprendizagem da progressão aritmética em um ambiente de ensino, através da resolução de problemas. Os participantes foram alunos do 1º ano do Ensino Médio, de uma escola particular, localizada em Santa Maria /RS. A coleta de dados, desenvolvida em oito encontros, utilizou como aporte teórico a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas proposta por Allevato e Onuchic (2014). Foram planejados e aplicados problemas que possibilitassem a construção e formalização de tal conteúdo. É uma pesquisa de natureza qualitativa e a coleta de dados foi realizada por questionários, observação em sala de aula e análise documental. Os documentos analisados consistiram, especialmente, nas resoluções produzidas pelos alunos durante os encontros e os registros das observações, os quais ocorreram das seguintes maneiras: diário de campo, gravações em áudio e fotografias. Com a análise e discussão dos dados coletados notamos que os problemas desenvolvidos permitiram a inserção do aluno no processo de construção dos conceitos, tornando-os produtores do próprio conhecimento, pois as estratégias utilizadas na resolução dos problemas propiciaram a reflexão, contribuindo para o reconhecimento, a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos. Assim, a utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino favoreceu a aproximação do aluno com o conteúdo estudado de maneira menos abstrata. Essa metodologia se tornou uma importante estratégia, que gerou maior interesse e motivação por parte dos educandos, desenvolvendo um ambiente favorável à aprendizagem de Matemática.

Palavras-chave: Progressão Aritmética. Ensino de Matemática. Resolução de Problemas

Submetido em: 11/07/2020

Aceito em: 19/01/2020

Publicado em: 01/05/2020

¹ Mestra em Educação Matemática e Ensino de Física pela Universidade Federal de Santa Maria – UFSM/ PPGEMEF. Atualmente é professora de Matemática na Educação Básica na rede Estadual e Municipal de Santa Maria/RS. Endereço para correspondência: Guilherme Rau, 165. São Jose. Santa Maria – RS. CEP: 97095-200. E-mail: claviva01@gmail.com

² Doutora em Educação Matemática pela UNESP – RC. Professora Adjunta do Departamento de Matemática da UFSM. Endereço para correspondência: PPGEMEF/UFSM - Centro de Ciências Naturais e Exatas (Prédio 13) - Sala 1220. Avenida Roraima nº 1000. Cidade Universitária. Bairro Camobi. Santa Maria – RS. CEP: 97105-900 E-mail: fchnoguti@gmail.com

Arithmetic Progression: a proposal for teaching and learning through Problem Solving

Abstract

The following article is a piece of a Master's research, in which investigates the teaching and learning of arithmetic progression in a learning environment through problem solving. The participants were students from the first year of high school at a private school in Santa Maria / RS. The data collect was developed in eight meetings and used the Methodology of Teaching-Learning-Assessment of Mathematics as a theoretical support, through the Problem Solving proposed by Allevato and Onuchic (2014). The problems that were planned and applied would allow the construction and formalization of such content. It is a qualitative research and the data collection was carried out through questionnaires, observation and documentary analysis. The records of the observations were as follows: field diary, audio recordings, and photographs. With the analysis and discussion of the collected data we noticed that the developed problems inserted the students in the process of constructing the concepts, making them producers of their own knowledge, because the strategies used in the resolution of the problems led to reflection, contributing to the recognition, systematization and formalization of mathematical concepts. Thus, the use of problem solving as a teaching methodology favored the students' approach with the content in question, due to a less abstract manner. This methodology has become an important strategy that generated great interest and motivation on the part of students, developing a favorable environment for the learning of Mathematics.

Keywords: Arithmetic Progression. Mathematics Teaching. Problem Solving.

Progresión Aritmética: una propuesta para enseñar y aprender a través de la Resolución de Problemas

Resumen

Este artículo es un recorte de una pesquisa de maestria que investiga la enseñanza y el aprendizaje de la progresión aritmética en un entorno de enseñanza utilizando resolución de problemas. Los participantes fueron estudiantes del primer año de secundaria en una escuela privada en Santa Maria/RS. La investigación, desarrollada en ocho reuniones, utilizó la contribución teórica de la metodología enseñanza-aprendizaje-evaluación de las matemáticas a través de la resolución de problemas propuesta por Allevato y Onuchic (2014). Se planificaron y aplicaron problemas para permitir la construcción y formalización de dicho contenido. Se trata de una investigación cualitativa y la recolección de datos se realizó mediante cuestionarios, observación en el aula y análisis documental. Los documentos analizados consistieron especialmente en las resoluciones producidas por los estudiantes durante las reuniones y los registros de las observaciones se realizaron de las siguientes maneras: diario de campo, grabaciones de audio y fotografías. Con el análisis y la discusión de los datos recogidos, nos dimos cuenta que los problemas desarrollados permitieron la inserción del alumno en el proceso de construcción de conceptos, convirtiéndolos en productores de sus propios conocimientos, ya que las estrategias utilizadas para resolver los problemas proporcionaron reflexión, contribuyendo al reconocimiento, sistematización y formalización de conceptos matemáticos. Por lo tanto, el uso de la resolución de problemas como metodología de enseñanza favoreció el enfoque del alumno con el contenido estudiado de una manera menos abstracta. Esta metodología se ha convertido en una estrategia importante que ha generado un mayor interés y motivación por parte de los alumnos, desarrollando un ambiente favorable para el aprendizaje de las matemáticas

Palabras clave: Progresión Aritmética. Enseñanza de Matemáticas. Resolución de Problemas.

1. Introdução

O presente artigo é um recorte da pesquisa³ de mestrado, da primeira autora, orientada pela segunda autora, cujo objetivo geral foi investigar as contribuições que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, através da Resolução de Problemas, propicia no processo de ensino e aprendizagem da Progressão Aritmética (PA). Nesse contexto, destaca-se que a motivação para o desenvolvimento desta pesquisa resulta da carência de trabalhos que abordem a metodologia de resolução de problemas e as progressões. Tal carência foi um dos resultados percebidos e discutidos em um mapeamento⁴ realizado no início da pesquisa.

Ademais, a Matemática no Ensino Médio, geralmente, tem sido marcada pela tendência que Fiorentini (1995) denomina como tecnicista, para a qual a matemática se reduz a um conjunto de técnicas, regras, algoritmos, sem grande preocupação em fundamentá-los ou justificá-los. Essa percepção também é fruto de observações a respeito do ensino e aprendizagem da PA decorrentes da trajetória profissional da primeira autora, pois, nas escolas, a abordagem desse conteúdo não favorece a compreensão, sendo enfatizadas a utilização e a memorização de fórmulas. Tais fatos exigem novas orientações metodológicas para esse nível de ensino. Passamos, então, a refletir sobre o que poderia ser feito na tentativa de proporcionar o ensino e a aprendizagem desse conteúdo de forma diferenciada e com significado, ao contrário da prática de memorização e repetição.

Em contrapartida, existem estudos que mostram a Resolução de Problemas como metodologia de ensino para potencializar os processos de ensino e de aprendizagem nas aulas de Matemática, fortalecendo a construção de conceitos matemáticos pelos estudantes. Esta metodologia constitui-se num caminho para se trabalhar em sala de aula, onde o problema é o ponto de partida das atividades e é proposto, aos alunos, antes mesmo de lhes ter sido apresentado o conteúdo ou os recursos matemáticos mais apropriados ou pretendidos para a sua resolução (ALLEVATO, VIEIRA, 2016).

A utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino, segundo Onuchic (2013), favoreceu boas interações, socializações e discussões das estratégias utilizadas, pelos alunos, a partir de caminhos alternativos apoiados em suas intuições e conhecimentos prévios até se chegar a uma generalização.

³ Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do PPGEMEF, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática intitulada “O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS”.

⁴ Mapeamento apresentado na VI EIEMAT – Escola de Inverno – de Educação Matemática – UFSM, intitulado “UM MAPEAMENTO DE PESQUISAS QUE ABORDAM A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.” Anais disponíveis em: http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed_6/Anais_MIN-OF_2018.pdf

Nesse sentido, a partir de estudos realizados, principalmente em Allevato (2005); Onuchic (1999); Allevato e Onuchic (2014); Dante (2010), Schroeder e Lester (1989); Krulik e Reys (1997) e Polya (1985), passamos a considerar o ensino e a aprendizagem da PA no contexto da Resolução de Problemas. Logo, chegamos à formulação do nosso problema de pesquisa e desenvolvemos nossa investigação, com o intuito de responder a seguinte questão: “Como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas contribui para o trabalho com Progressão Aritmética no Ensino Médio?”.

Para o seu desenvolvimento, realizamos oito encontros, todos embasados na metodologia proposta por Allevato e Onuchic (2014). Foram planejados e aplicados problemas que possibilitassem ao aluno construir o pensamento matemático por meio da observação, da experimentação, da visualização, do questionamento, e da própria reflexão de forma colaborativa com os colegas. As estratégias utilizadas pelos alunos, nas soluções apresentadas por eles durante o desenvolvimento desses encontros e os questionários respondidos pelos mesmos constituem os dados da pesquisa. Além disso, na próxima seção será apresentada uma breve revisão bibliográfica, a fim de apontar as principais características da abordagem de ensinar através da Resolução de Problemas.

2. Ensino através da Resolução de Problemas

Nesta abordagem, apresentamos a resolução de problemas como uma metodologia de ensino. O ponto de partida desse processo é o problema, visto como gerador do processo de construção do conhecimento. Nesse caso, o aluno constrói os conceitos matemáticos durante a resolução de um problema, tendo o professor como mediador para formalizar o conhecimento. A estratégia consiste em um caminho para se ensinar Matemática e não apenas para ensinar a resolver problemas, diferenciando-se do ensino tradicional, presente na maioria das aulas.

No entanto, para trabalhar com essa metodologia é necessário ter clareza do que é um problema, mesmo que existam diferentes concepções a respeito (ONUCHIC, ALLEVATO, 2011). Logo, selecionamos algumas delas:

[...] um problema se diferencia de um exercício na medida em que, neste último, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de forma imediata, à solução. (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p. 16).

De maneira genérica, pode-se dizer que é um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido e que exige o pensar consciente do indivíduo para solucioná-lo. (DANTE, 2010, p. 11)

Temos um problema sempre que procuramos os meios para atingir um objetivo. Quando temos um desejo, que não podemos satisfazer imediatamente, pensamos nos meios de satisfazê-lo e assim se põe um problema. (POLYA, 1985, p. 13 apud NOGUTI, 2014, p. 27).

Todas essas concepções apresentam alguns aspectos semelhantes. Assim, podemos dizer que há uma concordância entre os educadores matemáticos, pois o problema deve possibilitar ao educando aprender a dar opiniões, desenvolver a criatividade, gerar motivação para resolvê-lo, incentivar o exercício do pensar matemático e a reflexão sobre os caminhos da resolução. Sem desconsiderar as concepções de problema citadas, para o presente estudo a concepção de problema que será adotada como referencial é apresentada por Onuchic e Allevato (2011): “problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer”. Ou seja, são atividades ou situações em que a resolução do problema, de antemão, não é conhecida ou memorizada pelos estudantes.

Alguns pesquisadores brasileiros (ONUCHIC, 1999; ALLEVATO, 2005; NUNES, 2010; NOGUTI, 2014; PAGANI, 2016; VIEIRA, 2016) apresentam e utilizam a resolução de problemas como metodologia de ensino, demonstrando que conceitos matemáticos podem ser melhor ensinados se utilizada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Ao utilizar a terminologia Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, propõem-se dizer que essas três ações estão intimamente relacionadas, pois é um processo triplo, tendo a avaliação integrada ao processo de ensino-aprendizagem.

Assim, para desenvolver o estudo da PA com os alunos utilizamos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação empregada por Allevato e Onuchic (2014), que sugere dez etapas para sua organização e desenvolvimento: (1) proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observar e incentivar, (6) registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo, (10) resolução de novos problemas e proposição de novos problemas. Allevato (2014) resume essas etapas para que o professor possa colocar em prática e usufruir melhor dessa metodologia em sala de aula, conforme o esquema abaixo. (Figura 1):

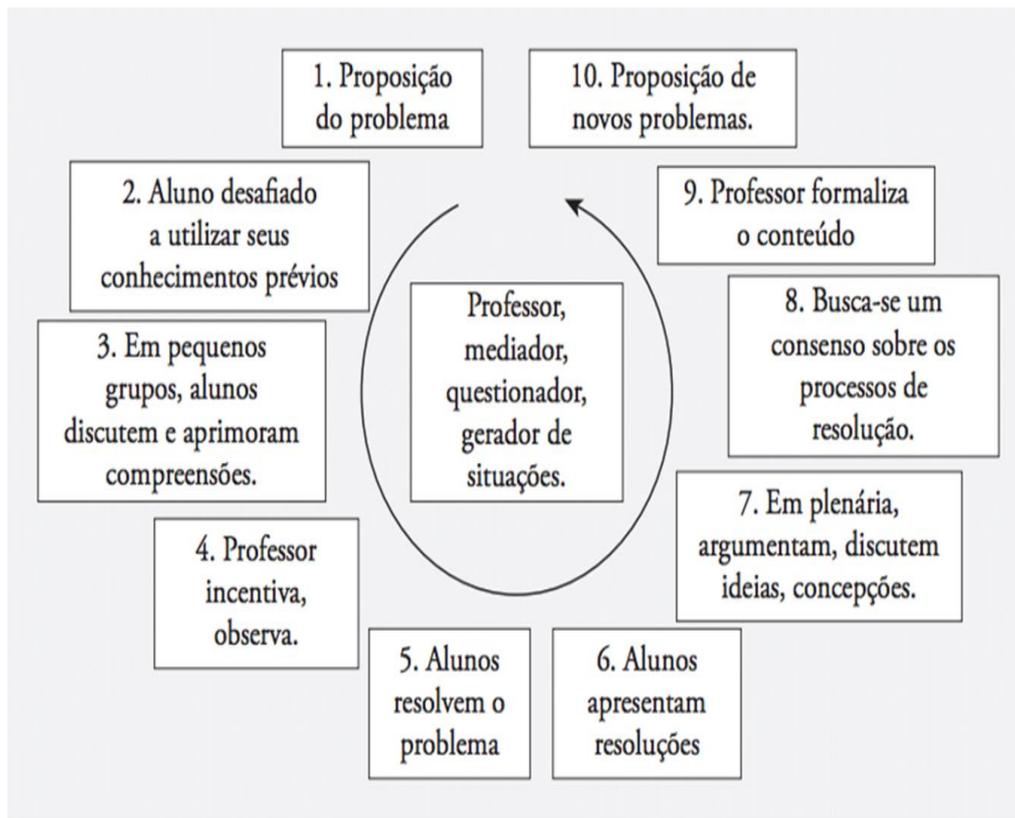


Figura 1: A Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino.
 Fonte: (Allevato, 2014)

Com relação às fases descritas, acreditamos que, seguindo os passos dessa metodologia, o aluno poderá ter uma maior compreensão de conceitos matemáticos envolvidos. Dessa forma, a escolha deste caminho se justifica pela concordância com as autoras supracitadas, quando afirmam ser esta uma abordagem atual para o ensino de Matemática. Sendo assim, concordamos que seja uma das alternativas metodológicas adequadas ao cenário de complexidade em que se encontram atualmente as escolas, nas quais se insere o relevante trabalho do educador matemático (ALLEVATO; ONUCHIC; 2014).

Além de que, é importante ressaltar que o Brasil está passando por uma alteração em seus documentos normativos na Educação Básica, que se trata da Base Nacional Curricular Comum (BNCC)⁵. A parte da BNCC para a Educação Infantil e o Ensino Fundamental foi aprovada em 2017, já a parte do Ensino Médio foi aprovada pelo Conselho Nacional de Educação e homologada pelo MEC - Ministério da Educação, em dezembro de 2018, e está em fase de implementação em todo o país.

⁵ É um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE).

No que tange a Resolução de Problemas, podemos compreender que uma das intenções da BNCC é desenvolver determinadas habilidades, atitudes e competências pautadas na resolução de problemas, conforme o texto da BNCC para o Ensino Médio mostra:

Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2018, p. 528)

Entretanto, não percebemos na BNCC um apontamento metodológico para a Resolução de Problemas, conforme presenciemos nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN. Nessa perspectiva os PCN (1998) afirmam que:

[...] a Resolução de Problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 1998, p. 52)

De forma complementar, para os PCN do Ensino Médio (BRASIL, 2000), foram também elaboradas orientações educacionais, sem pretensão normativa, denominadas PCN+ (BRASIL, 2002). Podemos observar que esse documento também estava alinhado com a resolução de problemas, pois em uma de suas seções chamada “Estratégias para ação” destacam-se que:

Para alcançar os objetivos estabelecidos de promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática, a proposta dos PCNEM privilegia o tratamento de situações problema, preferencialmente tomadas em contexto real. A resolução de problemas é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado. (BRASIL, 2002, p.129)

Consideramos que, para essa metodologia trazer benefícios ao aprendizado, depende do professor estar bem preparado para inseri-la em sua sala de aula, sendo que esses documentos oficiais discutem caminhos para fazer Matemática em sala de aula, e, além disso, a Resolução de Problemas é indicada como metodologia e ponto de partida da atividade matemática. Contudo, na BNCC, diferentemente dos PCN, não observamos isso de modo claro, logo, cada escola pode adotar uma concepção diferente.

Diante do exposto, a partir da abordagem de ensinar através da resolução de problemas, fizemos uso de problemas que propiciassem aos estudantes desenvolver uma compreensão da PA. A seguir apresentaremos os procedimentos metodológicos adotados na pesquisa.

3. Ações metodológicas e contexto da pesquisa

A metodologia empregada nesta pesquisa é de natureza qualitativa, já que envolve compreender e analisar uma proposta de ensino de matemática com a utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, aplicada em contexto escolar. Ainda nessa abordagem, a pesquisadora, também regente da turma, manteve contato direto com o grupo pesquisado, realizando oito encontros de uma hora e quarenta minutos cada, com trinta e oito alunos, durante um período de dois meses.

A pesquisa ocorreu no 2º semestre de 2018, em uma escola diocesana no Estado do Rio Grande do Sul. É uma escola particular que mantém parcerias com os governos municipal e estadual e tem por princípio uma formação humana e cristã. Lúdke e André (1986, p.13) exemplificam a pesquisa qualitativa como aquela que “envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes”.

Seguindo as orientações de Allevato e Onuchic (2014), foram pesquisados e adaptados cinco problemas para serem trabalhados no decorrer dos encontros. Os alunos também resolveram, fora da sala de aula, mais sete problemas, como tarefa. Para a preparação dessas atividades, apoiamos-nos em Dante (2016), Giovanni et al. (2014) e nas questões do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM. Os problemas tinham como propósito, primeiramente, identificar padrões e desenvolver o conceito de sequência, para construir os conceitos de PA.

Inicialmente, como medida ética, estabelecemos o contato com a direção do colégio Instituto São José a fim de explicar sobre o nosso projeto de pesquisa e solicitar a autorização para a realização do estudo em suas dependências. Com a finalidade de validar nossa pesquisa, submetemos o projeto à apreciação do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da UFSM, obtendo aprovação em 14/08/2018, sob o número⁶ 194694918.2.0000.5346. Em seguida, entramos em contato com os sujeitos da pesquisa para a informação dos objetivos do estudo e solicitação de suas participações.

Para cumprir o percurso metodológico da nossa pesquisa, utilizamos diferentes técnicas: “Técnica é um conjunto de preceitos ou processos que serve uma ciência ou arte; é a habilidade para usar esses preceitos ou normas; é a parte prática” (MARCONI; LAKATOS, 2007, p. 62). Fizemos uso de três técnicas que nos auxiliaram na coleta dos dados, a saber: o questionário, a observação e a análise documental.

⁶ Esse número é único e corresponde ao Certificado de Apresentação para Apreciação Ética (CAAE), que será o identificador do projeto, servindo de respaldo para o pesquisador e segurança para as pessoas envolvidas na pesquisa, de acordo com a legislação (BRASIL, 2012).

Nesse contexto, destacamos que o questionário é um instrumento tradicional de coleta de informações e consiste em uma fonte complementar para obter informações, principalmente na fase inicial e exploratória da pesquisa. Ele ajuda na caracterização e descrição dos sujeitos de pesquisa (FIORENTINI; LORENZATO, 2009). Em nossa pesquisa, aplicamos dois questionários. O primeiro, contendo em sua maioria questões fechadas foi aplicado antes de as atividades serem desenvolvidas, com o intuito de obtermos um levantamento de dados pessoais e delineamento do perfil dos estudantes, bem como a opinião deles a respeito da disciplina de matemática. Ao final da coleta de dados em sala de aula, o segundo questionário contendo apenas questões abertas, foi aplicado. Esse foi elaborado com o objetivo de conhecer a opinião dos estudantes sobre a experiência vivenciada.

A observação é uma técnica básica de coleta de dados em todas as ciências, sendo importante para a obtenção e construção de qualquer conhecimento. Conforme Lüdke e André (1986, p. 25), a observação precisa ser controlada e sistemática, “implicando a existência de um planejamento cuidadoso do trabalho e uma preparação rigorosa do observador”. Esse planejamento irá delimitar o que observar e como fazê-lo. Nossas observações foram feitas no horário regular do colégio. A pesquisadora era, também, a professora que conduzia as atividades, desempenhando o papel de observar e mediar as atividades. Procurando, assim, observar como os alunos desenvolveram os problemas, as estratégias de resolução, os questionamentos e os diálogos entre eles.

Nessa perspectiva, buscamos anotar como os estudantes compreendiam e tentavam resolver os problemas com seus conhecimentos prévios. E um diário de campo foi elaborado ao final de cada encontro, detalhando sobre o decorrer do trabalho realizado em sala. O diário de campo corresponde aos registros dos dados coletados durante a observação. Ele é um importante instrumento de relato e registro do que está acontecendo, uma forma de desvendar, refletir criticamente os processos que vão sendo construídos, pois “[...] captam o ensino imediato, uma vez que refletem as percepções do que está a ocorrer” (GARCIA, 1999, p. 187). O registro dos dados foi complementado com fotografias, vídeos e gravações em áudio com o intuito de anotar todos os acontecimentos que tenham relevância para interpretação.

A Análise Documental, por sua vez, pode se constituir como uma técnica valiosa de abordagem de dados, seja complementando as informações obtidas por outras técnicas, seja desvendando aspectos novos de um tema ou problema. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986). Ou seja, a análise documental é uma técnica de pesquisa que busca a identificação e a apreciação de documentos para um determinado fim.

Os documentos analisados consistiram, especialmente, dos registros produzidos pelos alunos

durante os encontros. Todos os problemas foram fornecidos e entregues aos alunos em papel próprio, com espaço para resolução e, após concluírem, foram recolhidos pela pesquisadora, a qual incentivava os alunos a registrarem nesse papel seus cálculos, suas estratégias e suas ideias, a fim de se obter evidências que não foram detectadas durante a observação. Também foram analisados os questionários aplicados.

Além do trabalho com a resolução de problemas foi possível aliar o uso de material manipulativo para a obtenção de padrões, reconhecendo, assim, as sequências e, no último encontro, um aplicativo (*app*) de aprendizado baseado em jogos: o *Kahoot!*. A escolha deste *app* foi realizada devido a sua facilidade no manuseio, que apesar de ser disponibilizado em inglês, possui uma interface intuitiva. Também dada a familiaridade com que os alunos interagem com os dispositivos móveis e esses permitem o desenvolvimento de atividades não apenas para jogar, mas para despertar, engajar, promover a aprendizagem e resolver problemas. Por fim, encerramos a pesquisa com um quiz game no *app* citado.

A seguir, apresentamos e discutimos um encontro que salienta as contribuições que essa metodologia propicia no processo de ensino e aprendizagem da PA, permitindo professor e aluno perceberem as dificuldades no aprendizado do conteúdo em questão e como favoreceu a tomada de decisões e mudança de estratégias de ensino.

4. Análise dos Resultados

Dentro dessa perspectiva, buscamos e adaptamos problemas que pudessem atuar como problemas geradores do processo de ensino-aprendizagem da PA. Utilizando material concreto, iniciamos com atividades que exigem o reconhecimento de padrões e regularidades em sequências, para que o aluno perceba o que é uma sequência numérica, faça generalizações, conceitue a PA e a seguir parta para a dedução das fórmulas do termo geral e soma da PA. Por último, visamos explorar a ideia de que a PA é uma função afim.

Vale salientar que, no primeiro encontro esclarecemos aos alunos como seria o desenvolvimento das aulas, isto é, como iria ocorrer a dinâmica dos encontros e explicando as etapas da metodologia utilizada, pois era a primeira vez que eles trabalhavam dessa forma. A figura 2, abaixo, ilustra uma dessas etapas, a plenária. Neste momento, a professora dividia o quadro em oito partes para que cada grupo pudesse apresentar suas resoluções. A parte à esquerda, mostra como os alunos apresentavam suas resoluções no quadro, e à direita, o quadro ao final da exposição dos alunos.



Figura 2: Quadro de resoluções

Fonte: Dados da autora

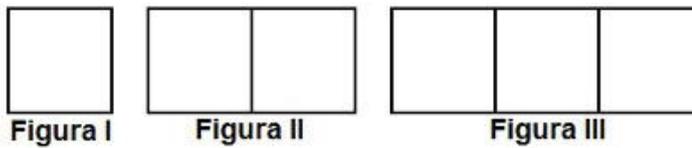
Nos primeiros encontros alguns grupos, ao invés de escolher um representante para ir ao quadro, iam em duplas ou trios. Sentiam-se mais seguros e confortáveis dessa maneira, o que foi permitido pela pesquisadora.

Apresentaremos, aqui, um problema abordado no terceiro encontro, descreveremos nessa parte do texto como se deu a dinâmica do encontro, apresentando o problema, as estratégias de resolução de alguns alunos e as reflexões sobre o que ocorreu durante a experiência deles com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através de Resolução de Problemas.

O problema (figura 3), abaixo, visa consolidar e aprofundar a construção do termo geral de uma sequência, uma vez que no encontro anterior apresentamos os conceitos sobre sequências numéricas e a representação de seus termos. Propomos, então, mais uma vez neste problema, discutir e determinar o termo geral de uma sequência, sem a utilização de fórmulas prontas, mas analisando padrões geométricos, aritméticos e algébricos.

Objetivamos, também, levar o estudante a identificar, caracterizar e levantar propriedades da progressão aritmética, bem como determinar seu termo geral antes de qualquer formalização, pois na Resolução de Problemas o “problema” se apresenta como ponto de partida na construção do conhecimento e não como definição.

PROBLEMA 3: (Enem 2010 - Adaptado) Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando palitos de fósforos para montar figuras, onde cada lado foi representado por um palito. A quantidade de palitos de cada figura depende da quantidade de quadrados que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir: (utilizando palitos de fósforos queimados, represente a figura abaixo).



- a) Mantendo o padrão apresentado, construa com palitos a 4ª, 5ª e 6ª figuras.
 b) Complete a tabela com a sequência correspondente à quantidade de palitos usados na construção de cada figura.

Posição da figura	Número de quadrados	Número de palitos
1ª	1	4
2ª	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	

- c) Vocês perceberam algum padrão na formação das figuras? Descreva-o.
 d) Continue completando a tabela e obtenha a expressão que fornece o número de palitos em função do número de quadrados de cada figura?

Posição da figura	Número de quadrados	Número de palitos
10ª	10	
...	...	
25ª	25	
...
n-ésima	N	

- e) Quantos quadrados se podem formar com 493 palitos?

Figura 3: Problema 3
 Fonte: Dados da autora

Após a leitura individual e em grupo, os alunos partiram para a construção, com palitos, da quarta, quinta e sexta figuras, conforme solicitado no item a. Pretendíamos, com isso, que ao formar as figuras eles percebessem que sempre se acrescenta um número constante de palitos (no caso, 3), ou seja, que o processo de construção da figura favoreça o aluno na percepção da regularidade e consequentemente a obtenção do termo geral. Além de desenvolver estratégias de comunicação, argumentação e de representação, uma vez que será necessário construir sequências com material concreto e registrar observações para exprimir suas ideias matemáticas.

Todos os grupos construíram corretamente o que foi solicitado. A figura 4 ilustra um dos grupos realizando este item da folha de atividades.

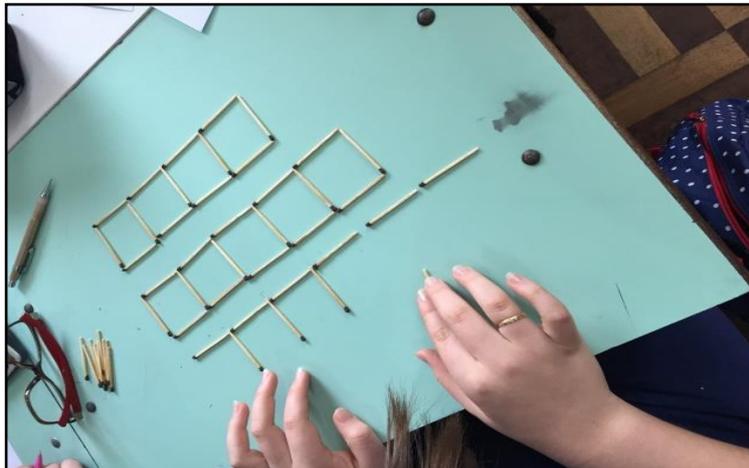


Figura 4: Resolução do item a
 Fonte: Dados da autora

Na continuação deste problema, além de completar a tabela relacionando a quantidade de palitos usados na construção de cada figura, perguntamos que padrão de regularidade existia na formação das figuras. Objetivamente, os grupos afirmaram que sempre aumentava de três em três e inferiram logicamente a seguinte resposta: “um palito fixo, para cada novo quadrado acrescentamos três novos palitos”.

Durante esse processo não houve muitos questionamentos. Para completar a tabela, os alunos utilizaram a contagem, foram aumentando três unidades em relação ao termo anterior. Concluíram rapidamente que a sequência era 4, 7, 10, 13 e assim por diante. Essa associação entre os padrões e a formação de sequência demonstra que o problema levou os alunos a estabelecer conjecturas, e comprová-las ou descartá-las, a partir dos padrões de regularidade observados.

O item (d) desse problema desafiava os alunos a buscar uma generalização e mudar do registro geométrico e aritmético para um registro algébrico. Apesar de terem feito isso no encontro anterior, nem todos os estudantes, dos respectivos grupos, conseguiram, de imediato, compreender as respostas, principalmente no que tange a generalização do padrão. Em alguns momentos, os alunos argumentavam oralmente, mas não conseguiam escrever o que pensavam. Esses, porém, se favoreceram com o auxílio dos colegas que desenvolveram as respostas.

Um dos grupos chegou à generalização $P(n) = 3n+1$, fixando o primeiro palito e utilizando a regra: $1 + 3 \times (\text{número de quadrados}) = 1 + 3n$, outros chegaram à mesma expressão fazendo tentativas de expressões algébricas, testando e validando suas ideias. Entretanto, mesmo resolvendo por tentativa, notamos que os alunos avançaram nas discussões, nos encontros anteriores os alunos foram mais comedidos em suas falas, apenas trocando e conferindo respostas. Com o ambiente

proporcionado pela metodologia utilizada, foi possível observar um pequeno avanço em relação à discussão, à interação e às estratégias adotadas para a resolução.

Entre as resoluções desenvolvidas pelos alunos, escolhemos uma para exemplificar neste artigo. Ela foi desenvolvida na etapa da plenária, quando o grupo 2 argumentou que pensou diferente, mas que perceberam durante a exposição no quadro que o termo geral encontrado por eles era o mesmo, se aplicassem a propriedade distributiva e adicionassem os termos semelhantes. Este grupo encontrou para termo geral: $P(n) = 4 + (n - 1) \cdot 3$, conforme explicação da figura 5, a seguir:

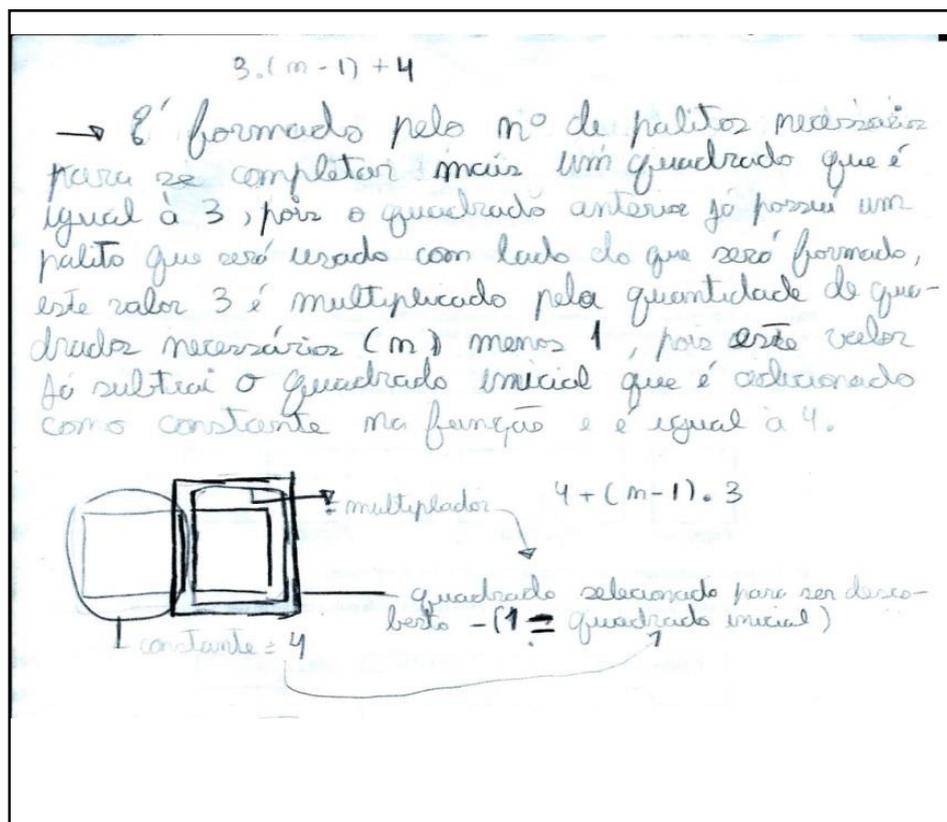


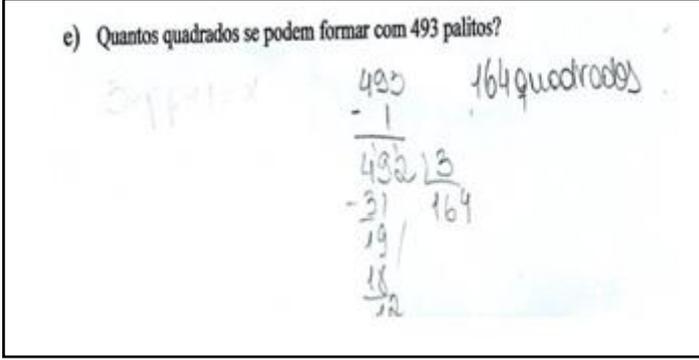
Figura 5: Explicação do grupo 2

Fonte: Dados da autora

O grupo 2 chegou à expressão $P(n) = 4 + (n - 1) \cdot 3$, a partir da observação de que a sequência iniciava no quatro e a cada termo da sequência, era sempre aumentado 3 com relação ao termo anterior. Indicaram por $n - 1$ o número anterior a n , como no registro da figura acima, isto é, utilizaram a regra $4 + 3 \times (\text{número de quadrados tirando um}) = 4 + 3(n - 1)$.

Mostramos aos alunos que é possível verificar neste exemplo que existem diferentes maneiras de pensar este padrão. Assim, surgem expressões algébricas distintas para generalizar um mesmo padrão, porém, são todas expressões equivalentes.

Foi possível perceber, que o item (e) se mostrou mais trabalhoso para os alunos, pois pedia quantos quadrados se podem formar com 493 palitos. Mesmo com a expressão algébrica formada, os alunos, de certo modo, demonstraram um pouco de dificuldade em trabalhar seus raciocínios algebricamente, demonstrando que é necessário intensificar essa forma de atividade. A seguir, apresentamos algumas resoluções. Na Figura 6, é ilustrado o registro aritmético feito pelo grupo 7.



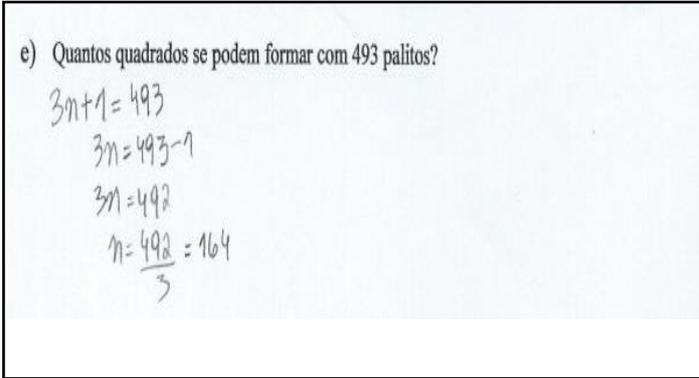
e) Quantos quadrados se podem formar com 493 palitos?

$$\begin{array}{r} 493 \\ - 1 \\ \hline 492 \end{array} \quad \begin{array}{r} 164 \\ \hline 3 \end{array}$$

Figura 5: Resolução do grupo 7

Fonte: Dados da autora

Já na figura 7, temos a resolução algébrica realizada pelo grupo 1.



e) Quantos quadrados se podem formar com 493 palitos?

$$\begin{aligned} 3n+1 &= 493 \\ 3n &= 493-1 \\ 3n &= 492 \\ n &= \frac{492}{3} = 164 \end{aligned}$$

Figura 7: Resolução do grupo 1

Fonte: Dados da autora

Durante a resolução deste item, a professora observou que vários erros foram cometidos pelos alunos, tais como: compreensão da expressão algébrica fazendo substituição indevida das variáveis; dificuldade do aluno na realização dos cálculos; fazendo a divisão antes da subtração, ou seja, erros em relação à operação inversa da adição do primeiro para o segundo membro da equação. Esses erros na resolução têm origem em conhecimentos prévios dos mais variados (números inteiros, concepção de operações, operações com polinômios, etc.).

No entanto, nenhum registro errado foi encontrado. Foi verificado que os alunos estavam entregando as respostas corrigidas após a plenária, ou em branco, sem as respectivas resoluções. A

professora precisou lembrar os alunos, novamente, que o combinado, era que entregassem os problemas realizados nos grupos, mesmo errados, pois serviriam de análise para mostrar formas distintas e até mesmo incorretas de resolução.

Após a plenária, a formalização do conteúdo foi realizada. As conclusões obtidas a partir da resolução do problema 3 foram retomadas e a definição de PA, razão e termo geral de uma PA foram expostas no quadro. Esse processo se deu, partindo da sequência (4, 7, 10, 13,...), de forma colaborativa entre os alunos e a professora, conforme destacamos no seguinte diálogo⁷:

P:(escrevendo no quadro os primeiros termos da sucessão, com o respectivo desenho).
 Construímos um quadrado com 4 palitos de fósforos, dois quadrados com 7 palitos,.....
 Então $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_3 = 10$. É isso?

Alunos: Simmmm

P: O que acontece do a_1 para o a_2 ?

2B: aumenta 3

P: Certo! E de a_2 para a_3 ?

2C: a mesma coisa... aumenta mais três palitos.

P: Então o que vai acontecer a a_{n+1} em relação a a_n ? Perceberam?

Alunos em coro: também aumenta 3

P: Então podemos escrever: $a_{n+1} = a_n + 3 \leftrightarrow a_{n+1} - a_n = 3, \forall n \in N$.

2E: O resultado dessa subtração sempre será 3.

P: Exato! Chamamos de P.A. uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra r . Vamos definir a_2, a_3, a_4, \dots “à custa” de a_1 e desta razão ($r=3$).

7B: Como?

2C: O $a_1 = 4$, o $a_2 = 4 + 3 = a_1 + 3$ (nesse momento a professora pede que o aluno escreva no quadro), $a_3 = 7 + 3 = a_2 + 3$, $a_4 = 10 + 3 = a_3 + 3 \dots$

P: Obrigada! Então podemos substituir assim: $a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_2 + r$, substituindo $a_2 = a_1 + r$, temos que $a_3 = a_1 + r + r = a_1 + 2r$, e a_4 , como fica?

5E: $a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$

P: Quantas vezes adicionamos o valor r em a_4 ?

2B: Adicionamos três vezes.

P: E quantas vezes adicionamos o valor r , em a_3 ?

4B: duas vezes

P: E quantas vezes adicionamos o valor r em a_2 ?

3B: 24 vezes, sempre um a menos

P: Então podemos dizer que $a_n = a_1 + (n-1).r$, assim no exemplo $a_n = 4 + (n-1).3$.

Explicamos que, para formar um quadrado, é necessário utilizar quatro palitos. Para formar dois quadrados, sete palitos e, para formar três quadrados, dez palitos e assim por diante. Com isso, temos uma progressão aritmética de razão igual a 3, onde os índices dos termos da PA indicam o número de quadrados (Q) construídos em cada passo, enquanto os termos representam a quantidade de palitos (P) utilizada na construção. Salientamos que ao encontrarmos a razão, nada mais estamos fazendo do que identificar o padrão que está implícito na sequência.

⁷ Para ocultar a identidade dos participantes, quando esses forem mencionados, serão identificados por um número que indica o seu grupo (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), seguido de uma letra (A, B, C, D, E) que corresponde a cada aluno. Quando o termo P aparece estamos referindo-nos a uma ação da professora pesquisadora.

Comentamos que na tabela construída foi possível averiguar os “saltos” de um termo para outro quando se soma um determinado valor constante, neste caso a razão da PA, é que foi possível dar saltos maiores, quando um termo é somado a um múltiplo da razão. Essa ideia foi debatida com os estudantes porque, geralmente, encontramos qualquer termo de uma PA, desde que sejam conhecidos o primeiro termo e a sua razão. A fórmula amplamente utilizada para o termo geral indica como se determina um elemento qualquer a partir do primeiro termo. Entretanto, através da mesma ideia generalizada acima podemos obter uma relação mais abrangente que não apresenta dependência de qualquer termo em relação ao primeiro termo da PA, isto é, para que se conheça a progressão aritmética inteira precisamos conhecer apenas um de seus termos e sua razão. Reforçamos também com eles quais são as variáveis utilizadas na fórmula, bem como, a ordem em que devem ser feitas as operações.

Acreditamos que os alunos demonstraram grande interesse nas discussões e reflexões durante a sistematização do conteúdo, devido a motivação despertada pelo problema proposto anteriormente, pois vários deles aproveitaram para fazer colocações sobre os problemas em comparação com a formalização acerca das progressões aritméticas, contribuindo para seu aprendizado. Isso pode ser observado porque a professora também é a regente da classe, e em outras aulas onde essa metodologia não é aplicada as indagações e dúvidas são menores.

Os questionamentos feitos nesse problema exigiam alguns conhecimentos relacionados a progressões aritméticas, contudo, os alunos foram capazes de respondê-los com conhecimentos adquiridos anteriormente, mesmo que o tempo gasto tenha sido maior do que se já tivessem o conhecimento formalizado de progressões aritméticas.

Assim sendo, percebemos que nosso objetivo foi atingido, pois, as estratégias de generalização que verificamos no início das resoluções, consistiam em contagem e estratégias recursivas, ou seja, os alunos conseguiam determinar o termo seguinte com base no anterior. Ao final, já procuravam estabelecer uma relação direta entre a variável dependente e independente. Acreditamos que o desafio da resolução do problema e os conhecimentos prévios juntamente com a mediação da professora, foram as principais ferramentas utilizadas para que o novo conhecimento fosse adquirido.

O último encontro foi pensado com o intuito de fazer um fechamento do trabalho, conectando aquilo que os alunos haviam estudado nos encontros anteriores com a última etapa da nossa metodologia, que sugere a proposição e a resolução de novos problemas.

Como já explicado anteriormente, esses novos problemas foram realizados por intermédio de um jogo digital. Os problemas para o quiz foram criados pelos grupos, sob orientação da professora. Inicialmente, os alunos acessaram o *site* www.kahoot.it e foi liberado o código de acesso

pela professora para que eles pudessem se conectar ao quiz criado. Prontamente, conectaram-se ao app e foi possível ver que eles já tinham certo domínio, mesmo sendo um novo aplicativo em suas mãos. Esse comportamento dos alunos está de acordo com o que explicita Prensky (2001), para quem a maioria dos alunos, atualmente cursando o ensino básico, são considerados nativos digitais, ou seja, essa geração que nasceu com o celular nas mãos tem uma facilidade enorme de manusear essas ferramentas. Assim, utilizar o celular em um jogo em sala de aula se mostrou proveitoso, uma vez que os estudantes participaram ativamente, respondendo os problemas por meio do Kahoot! (Figura 8).



Figura 8: Alunos utilizando o app.

Fonte: dados da autora

5. Considerações finais

A partir do que foi desenvolvido durante a pesquisa, concluímos que o objetivo foi alcançado, uma vez que durante a experiência vivenciada, percebemos elementos que favoreceram os processos de ensino e aprendizagem da PA. Ao desenvolver as atividades em sala de aula, seguindo os passos da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação, observamos um crescimento gradativo a cada encontro, em relação à aplicação da nova metodologia, pois outros pressupostos foram incorporados no decorrer do processo, construindo novas concepções para o ensino de Matemática. Para isso, durante o trabalho desenvolvido, buscamos:

1) Inserir os alunos no trabalho em grupo, desenvolvendo características como: cooperação, responsabilidade e interação com os colegas, atividade essa que proporcionou que os mesmos vivenciassem um momento novo em sala de aula;

2) Criar o hábito de leitura dos problemas, pois a maioria dos alunos desenvolvem a prática de realizar uma leitura rápida e recorrer ao professor para esclarecer suas dúvidas;

3) Desenvolver o conhecimento implícito durante o processo de resolução dos problemas, o qual possibilitou descobrir novos conhecimentos, percebendo padrões, construindo conjecturas, fazendo relações e estabelecendo comparações; e

4) Promover um ambiente colaborativo de discussão e compartilhamento de ideias, desenvolvendo capacidades de interpretação e argumentação a fim de aprimorar as resoluções dos problemas durante a plenária, atividade até então, nova para os estudantes.

A partir do desenvolvimento e do exposto até aqui, podemos ressaltar que ensinar em um ambiente de resolução de problemas, não é uma tarefa muito fácil, pois são necessárias mudanças de postura tanto do professor quanto do aluno. Dessa forma, salientamos algumas vantagens nessa experiência, tais como: os alunos empenharem-se muito mais em aula; manifestarem sua autonomia; participarem ativamente na construção do seu conhecimento; aprenderem a trabalhar em equipe; e, desenvolverem capacidades de interpretação e argumentação. Todas essas vantagens observadas são exigências frente às novas demandas educativas no mundo contemporâneo, em busca da formação de cidadãos críticos e conscientes.

Constatamos, ainda, que os alunos, inicialmente, tiveram dificuldades em generalizar o comportamento das sequências. No entanto, utilizando seus conhecimentos prévios, em grupos, com o auxílio da professora como mediadora do conhecimento dos alunos, esses refletiram sobre as resoluções dos problemas, conseguindo chegar à generalização de sequências e essa generalização pode ser utilizada para levá-los à construção dos conceitos que envolvem a PA.

Destacamos, também, que os alunos demonstraram grande interesse nas discussões e reflexões durante a sistematização do conteúdo, devido à motivação despertada pelo problema proposto anteriormente, pois vários deles aproveitaram para fazerem colocações sobre os problemas em comparação com a formalização acerca das progressões aritméticas.

Assim, a partir desta pesquisa, a utilização dessa metodologia apresentou-se como um caminho a ser percorrido por professores e alunos que buscam por processos de ensino e aprendizagem com significado, em particular, da PA sem a utilização e memorização de fórmulas prontas. Essa metodologia se tornou uma importante estratégia de interesse e motivação por parte dos educandos, desenvolvendo um ambiente favorável à aprendizagem de matemática. Por fim, esperamos com esta pesquisa, contribuir com sugestões e estratégias de ensino capazes de romper com a memorização de fórmulas, que pouco contribui para a formação de nossos alunos, em particular, no ensino da PA.

6. Referências

ALLEVATO, N. S. G.; VIEIRA, G. **Do ensino de resolução de problemas abertos às investigações matemáticas: possibilidades para a aprendizagem.** Quadrante, (2016). 25(1), 113-131.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? In: Onuchic, L. R. et al. (Org.) **Resolução de Problemas: teoria e prática.** Jundiaí: Paco Editorial. 2014. p. 35-52.

_____. **Associando o computador a resolução de problemas fechados: análise de uma experiência.** 2005. 370 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Ensino Médio. **Base Nacional Comum Curricular**, 2018.

_____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio).** Brasília: MEC, 2000.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – Ensino Médio.** Secretaria de Educação Fundamental. –Brasília: MEC /SEF, 1998.

_____. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, 2002.

DANTE, L.R. **Formulação e Resolução de problemas de matemática: Teoria e Prática** 1ªed. São Paulo: Ática, 2010.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações.** São Paulo: Ática, 2016.

ECHEVERRÍA, M. P. P; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver para aprender. In: POZO, J. I. (ORG) **A solução de problemas.** Porto Alegre: ArtMed, 1998.

FIORENTINI, D. Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino da Matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, ano 3, n. 4, p. 1 - 37, nov. 1995.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. 2ed. Campinas: Autores Associados, 2009. 240 p.

GARCIA, C. M. **Formação de Professores: para uma mudança educativa.** Portugal: Porto Editora, 1999.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JR., J. R. **FTD: Sistema de ensino: SIM: ensino médio: Matemática: Livro do professor.** São Paulo: FTD, 2014.

KRULIK, S.; REYS, R. E. **A resolução de problemas na matemática escolar.** São Paulo: Atual, 1997.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MARCONI, M.; LAKATOS, E. M. **Técnica de pesquisa**. 7.ed. São Paulo: Atlas, 2007.

NOGUTI, F.C.H. Um curso de matemática básica através da resolução de problemas para alunos ingressantes da Universidade Federal do Pampa – Campus Alegrete. 2014. 370 f. Tese - (doutorado) - **Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas**, 2014.

NUNES, C. B. **O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas**: perspectivas didático matemáticas na formação inicial de professores de matemática. 2010. 430f. Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade estadual Paulista, Rio Claro.

ONUCHIC, L. R. **A resolução de problemas na Educação Matemática: onde estamos? E para onde iremos?** Espaço Pedagógico. (2013). 20(1), 88-104. Acedido em agosto 23, 2019, em <http://www.upf.br/seer/index.php/rep>

_____. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

ONUCHIC, L. R; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

_____. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. 4 ed. rev. São Paulo: Cortez, 2012.

PAGANI, E. M. L. **Ensino-aprendizagem-avaliação de derivadas no curso técnico integrado ao médio através da resolução de problemas**. 2016. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2016.

POLYA G.; **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1985.

PRENSKY, M. **Aprendizagem baseada em jogos digitais**. São Paulo: SENAC, 2001.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR., F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.) **New Directions for Elementary School Mathematics**. NCTM, 1989. (Year Book). p. 31-42.

VIEIRA, G. **Tarefas exploratório-investigativas e a construção de conhecimentos sobre figuras geométricas espaciais**. 2016. Tese (doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2016.