**DOI:** doi.org/10.25090/remat25269062v16n212019p101a118

REMat
Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional São Paulo
eISSN: 2526-9062

# MODELAGEM MATEMÁTICA COMO APOIO AO ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO QUADRÁTICA

**Silvana Costa Silva**
Instituto Federal da Bahia – IFBA, campus de Vitória da Conquista
E-mail: <scostasilva30@gmail.com>

**Zulma Elizabete de Freitas Madruga**
Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC
E-mail: <betefreitas.m@bol.com.br>

**Flaviana dos Santos Silva**
Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC
E-mail: <flavianadss@gmail.com>

**Resumo**

O presente artigo apresenta-se como parte de uma pesquisa mais ampla que tem por objetivo analisar as possíveis contribuições da Modelagem Matemática à aprendizagem de Função Quadrática. A pesquisa teve abordagem qualitativa intervencionista e fundamentou-se nos princípios da Modelagem Matemática, foi realizada no período de 2016 e 2017. Os sujeitos participantes da pesquisa foram 30 alunos de um curso Técnico Integrado ao Médio de uma Escola Federal do município de Vitória da Conquista/BA. Na proposta intervencionista de ensino, composta por 11 encontros, os alunos foram estimulados a formular e analisar seus próprios modelos matemáticos. Durante a intervenção, foi aplicado um roteiro de atividade com o intuito de implementar a Modelagem Matemática e validar o modelo construído. Para análise destaca-se três categorias: percepção e apreensão; compreensão e explicitação; e significação e expressão, originária dos estudos sobre Modelagem Matemática. Os resultados evidenciaram que a atividade permitiu aos estudantes construírem o conceito de Função Quadrática, mesmo que de maneira informal, assim como a posicionarem enquanto indivíduos atuantes nesse processo de aprendizagem.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática; Aprendizagem Matemática; Função Quadrática.

## MATHEMATICAL MODELING AS A SUPPORT FOR QUADRATIC FUNCTION EDUCATION AND LEARNING

**Abstract**
The present article is presented as part of a wider research that aims to analyze the possible contributions of Mathematical Modelling to the learning of Quadratic Function. The research had a qualitative interventionist approach and was based on the principles of Mathematical Modeling, was

carried out in the period of 2016 and 2017. The subjects that participated in the research were 30 students of a Technical Integrated to the Middle of a Federal School of the municipality of Vitória da Conquista/BA. In the interventionist teaching proposal, composed of 11 meetings, students were encouraged to formulate and analyze their own mathematical models. During the intervention, an activity script was applied with the intention of implementing Mathematical Modelling and validating the constructed model. For analysis, three categories stand out: perception and apprehension; understanding and explanation; and meaning and expression, originating from the studies on Mathematical Modelling. The results showed that the activity allowed the students to construct the concept of Quadratic Function, even in an informal way, as well as to position them as active individuals in this learning process.

**Keywords**: Mathematical Modelling. Learning Mathematics. Quadratic Function.

## MODELACIÓN MATEMÁTICAS COMO APOYO A LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE FUNCION CUADRATICA

### Resumen

El presente artículo se presenta como parte de una investigación más amplia que tiene por objetivo analizar las posibles contribuciones del Modelación Matemática para la aprendizaje de Función Quadráctica. La investigación ha tenido un enfoque cualitativo intervencionista y se fundó en los principios del Modelación Matemática, fue realizada en el período de 2016 y 2017. Los sujetos participantes de la investigación fueron 30 alumnos de un curso Técnico Integrado al Medio de una Escuela Federal del municipio de Vitória da Conquista/BA. En la propuesta intervencionista de enseñanza, compuesta por 11 encuentros, los alumnos fueron estimulados a formular y analizar sus propios modelos matemáticos. Durante la intervención, se aplicó un itinerario de actividad con el propósito de implementar el Modelación Matemática y validar el modelo construido. Para el análisis se destaca tres categorías: percepción y aprehensión; comprensión y explicitación; y significación y expresión, originaria de los estudios sobre Modelación Matemática. Los resultados evidenciaron que la actividad permitió a los estudiantes construir el concepto de Función Cuadrática, aunque de manera informal, así como a posicionarse como individuos actuantes en ese proceso de aprendizaje.

**Palabras clave:** Modelación Matemática. Aprendizaje de las Matemáticas. Función Cuadrática.

### Introdução

A proposta de utilização da Modelagem Matemática em sala de aula vem sendo discutida em pesquisas como: Fortes, Júnior e Oliveira (2013), que trazem uma proposta de aplicação de Modelagem Matemática com o objetivo principal de discutir aplicações de funções; Postal et al. (2011), que investigaram se a proposta que faz uso da Modelagem Matemática pode ser facilitadora da Aprendizagem Significativa; Beltrão e Igliori (2010), que investigaram a utilização da Modelagem e Aplicações como abordagens para o ensino do Cálculo.

Destaca-se também as pesquisas de Nascimento (2007), que propôs identificar as habilidades mobilizadas por estudantes de licenciatura em Matemática na aplicação do conceito de função explorando uma estratégia de Modelagem Matemática; Pires (2009) investigou as reais possibilidades de introduzir o conceito de função afim em turmas do 7º ano do Ensino Fundamental; e Pangung (2016), que investigou as possíveis contribuições da Modelagem Matemática à construção do conceito de função, a partir dos princípios orientadores da Educação Matemática Crítica.

Nas pesquisas citadas, a Modelagem aparece como uma estratégia pedagógica para aproximar a disciplina curricular do contexto no qual os indivíduos estão inseridos, constituindo-se importante no desenvolvimento de processos de construção de conceitos por distinguir-se como processo dinâmico voltado para a construção de modelos em diferentes áreas do ensino.

Bassanezi (2010, p. 24) considera que “a modelagem consiste, essencialmente na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual”. Para Biembengut e Hein (2013, p. 12), “Modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo” e é proveniente de aproximações da realidade para se entender mais e/ou melhor determinado fenômeno.

Os autores supracitados concordam que a Modelagem é um meio de interação entre a Matemática e situações da realidade, que favorece o estudo do comportamento de muitos fenômenos reais e/ou hipotéticos.

Nas atividades de Modelagem, os alunos são convidados a investigar situações reais de outras áreas do conhecimento, por meio do ferramental matemático, e lhes é oportunizado o papel de agentes ativos na construção do saber, tendendo, portanto, a provocar e potencializar a reflexão e a discussão sobre conceitos da Matemática, com a finalidade de construir o conhecimento.

Nessa perspectiva, este artigo tem como objetivo analisar as possíveis contribuições da Modelagem Matemática à aprendizagem de Função Quadrática. Para isso, apresenta-se na sequência os pressupostos teóricos desta pesquisa, tendo como base a Modelagem Matemática discutida por Bassanezi (2010, 2015), Biembengut e Hein (2013), e Biembengut (2016). Além disso, na sequência, explicita-se a metodologia adotada – qualitativa intervencionista – e os resultados alcançados. Ao final, apresentam-se as considerações sobre o estudo apresentado.

## Pressupostos teóricos

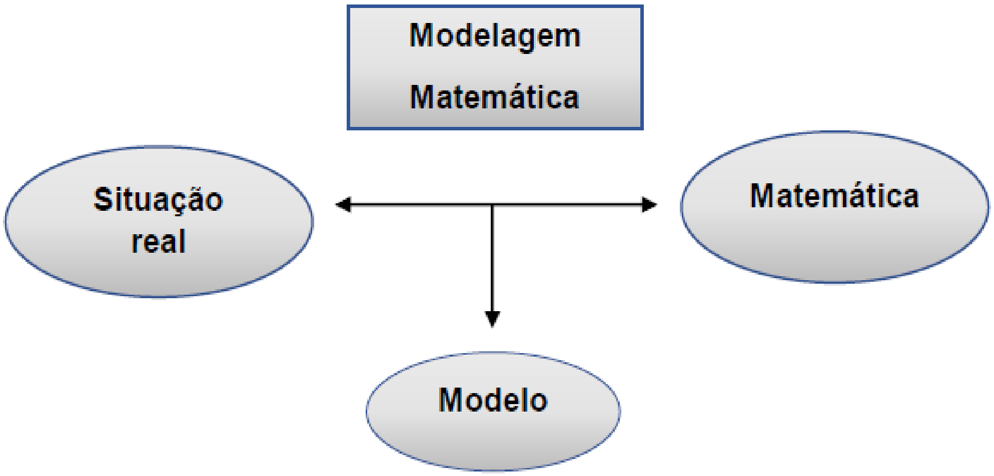
A Modelagem Matemática pode ser entendida como relação intrínseca entre realidade e Matemática, podendo possibilitar uma leitura crítica de mundo, servindo de aporte para a construção do conhecimento. Bassanezi (2015), apresenta a Modelagem Matemática como uma estratégia na qual se pode obter alguma explicação/entendimento da realidade, sendo, para isso, necessário traduzí-la em linguagem matemática.

Para tanto, o desenvolvimento de atividades de Modelagem, permite ao estudante se posicionar em relação a situações que requeiram solução e agir sobre elas de maneira autônoma, em busca de novos caminhos e diferentes soluções. Para o autor, “Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos” (BASSANEZI, 2010, p. 24).

Assim sendo, entende-se que a Modelagem é basicamente uma forma de tratar problemas reais, transformando-os em problemas matemáticos, a fim de solucioná-los por meio da construção de modelos, que se apresentem como um recorte da realidade, uma representação, que, por sua vez, será interpretada pelo conhecimento matemático.

O esquema da Figura 1 a seguir, apresenta o modelo como elo entre a Matemática e as situações do mundo real, proposto por Biembengut e Hein (2013, p. 13):

**Figura 1 -** Esquema do processo de Modelagem Matemática




**Fonte**: Biembengut e Hein (2013)

Conforme Biembengut e Hein (2013) explicitam, o modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que consistem em explicar uma dada situação real e obter resposta para a mesma. O esquema anterior supõe um processo interativo a fim de que o indivíduo perceba a Matemática presente em seu cotidiano por meio da construção de modelos, procurando entender a realidade que o cerca.

Para tanto, é preciso que o modelador perpasse por três fases, utilizadas no desenvolvimento da Modelagem Matemática, as quais Biembengut (2016) definem como:

- *Percepção e Apreensão:* consiste em reconhecer a situação problema e familiarizar-se com o assunto a ser modelado.

- *Compreensão e Explicitação:* nessa etapa, busca-se a compreensão e o delineamento da situação-problema em termos de simbologia matemática obtendo o modelo propriamente dito.

- *Significação e Expressão:* é a fase de efetivação do modelo. É nesse momento que o modelo será julgado válido, se descrever a situação-problema satisfatoriamente, ou seja, se permite entender e agir sobre tal. Caso isso não ocorra, deve-se retornar à(s) etapa(s) anterior(es).

## Modelagem na sala de aula de Matemática

A partir do entendimento de que a Modelagem Matemática promove uma relação com outras áreas do conhecimento, pode-se encontrar nela uma alternativa para o ensino e para a aprendizagem de Matemática. Isso é possível porque pode oportunizar aos alunos a participação direta e ativa no processo educacional, por meio da investigação de elementos que compõem determinada temática.

De acordo com Soares e Javaroni (2013, p. 195), “a Modelagem na Educação Matemática propõe que os alunos investiguem uma problemática, baseada em um tema proveniente de uma área científica ou do dia-a-dia, e que desenvolvam um modelo matemático para lidar com o problema em questão”. Pensando assim, o desenvolvimento de atividades partindo de uma temática tal como acontece na Modelagem Matemática, pode tornar a prática da pesquisa mais eficiente.

Godoy (2015) explica que a conexão entre a Matemática escolar e as demais áreas do conhecimento demonstra a importância dos conhecimentos matemáticos na Educação, e desenvolve no estudante a criticidade, leitura e interpretação das ocorrências fora do contexto escolar, mas que necessitam do saber matemático.

Pelo exposto, entende-se que a Modelagem Matemática favorece ao estudante perceber a Matemática como uma disciplina que não está isolada das demais, ao contrário, proporciona outra forma de pensar e agir por meio do diálogo entre as disciplinas.

Para fazer Modelagem em aulas de Matemática, Biembengut (2016) orienta que sejam seguidos os mesmos procedimentos das fases: Percepção e Apreensão, Compreensão e Explicitação, Significação e Expressão.

## Metodologia

Esta pesquisa é caracterizada pela abordagem qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994) uma vez que buscou compreender os procedimentos adotados pelos sujeitos participantes e os significados que esses atribuíram aos dados gerados no ambiente natural da pesquisa, a sala de aula.

Caracterizou-se como intervencionista pois, como método de investigação, elaborou-se uma intervenção de ensino. De acordo Damiani et al. (2013, p. 58), a palavra intervenção, na área de Educação, está relacionada a “investigações que envolvem o planejamento e a implementação de interferências (mudanças, inovações) – destinadas a produzir avanços, melhorias, nos processos de aprendizagem dos sujeitos que delas participam – e a posterior avaliação dos efeitos dessas interferências".

A pesquisa foi desenvolvida em uma escola da Rede Federal de ensino situada no interior da Bahia, no município de Vitória da Conquista, que teve como participantes 30 alunos do 1º ano do Ensino Médio, no turno vespertino, com idades entre 14 e 19 anos de idade, sendo 20 meninas e 10 meninos. A intervenção aconteceu durante 11 encontros de 100 minutos cada, os quais foram áudio gravados e o acompanhamento foi feito por meio de um diário de campo.

Esses encontros foram organizados em três fases, que fazem consonância com as etapas propostas por Biembengut (2016) para uma atividade de modelagem matemática: percepção e apreensão; compreensão e explicitação; significação e expressão.

Para o desenvolvimento da atividade, na primeira fase - *percepção e apreensão* - foi proposto aos alunos que investigassem sobre o tema esportes olímpicos e, para isso, a turma foi dividida em grupos, cada qual com uma modalidade, identificados como $G_1$, $G_2$, ..., $G_6$.

Esses, por sua vez, buscaram informações a respeito de seu tema de estudo, coletando dados sobre a trajetória que o objeto/corpo descreve e organizando-os a fim de reconhecerem o assunto, relacionando-o com a Matemática. Nesse último, levantaram alguns questionamentos importantes para adentrar na fase seguinte.

Na segunda fase - *compreensão e explicitação* - os grupos procuraram encontrar uma Função Quadrática que modelasse a situação investigada. Dos seis grupos, quatro conseguiram encontrar um modelo representativo da respectiva modalidade.

Na terceira fase - *significação e expressão* – os quatro grupos foram encaminhados para uma das salas de informática e utilizaram o *software* Modellus para validar os respectivos modelos encontrados, ou seja, verificar se esses respondiam ou não aos seus questionamentos iniciais. Cabe ressaltar que apenas um grupo não conseguiu validar o seu modelo.

## Análise e Discussão dos resultados

Nessa seção, apresenta-se a análise dos dados por meio de três categoria constituídas com base nas três fases da Modelagem Matemática apresentadas por Biembengut (2016).

### *Percepção e Apreensão*

Nessa categoria foram observados indicativos que caracterizam a relação da modalidade com outra área do conhecimento e com a Matemática - conteúdo específico de Função Quadrática -, ou ainda elementos que direcionam para essa disciplina.

As Figuras 2, 3 e 4 ilustram que o grupo 2 (G2 – futebol) encontrou uma conexão entre sua modalidade e a Física, em sala de aula, dos diversos dados e informações obtidos sobre o tema.

Dentre as pesquisas realizadas por esse grupo, estão destacados elementos da Física os quais interferem na modalidade escolhida – futebol -, principalmente no que tange ao desempenho do atleta em um drible, em uma cobrança de pênalti ou de uma falta, respectivamente em cada uma das figuras.

A Figura 2 explicita a relação entre o drible, executado pelo jogador em cima de seu oponente pela disputa da bola, com dois mecanismos da Física: inércia e força.

**Figura 2** - Extrato 1 do G2 referente à modalidade futebol

Driblar um adversário requer o princípio da inércia (formulada por nosso patrono Galileu e confirmada por Newton): todo corpo em movimento tende a permanecer em movimento. Outro artifício da física presente na finta é a Força, que é o resultado da massa x aceleração (F = m x a).

**Fonte:** Dados da pesquisa

**Figura 3** - Extrato 2 do G2 referente à modalidade futebol

Cobrar um pênalti com perfeição também envolve ciência. A penalidade indefensável é no ângulo (cerca de meio metro do travessão e da trave), numa velocidade de 104 km/h.

**Fonte:** Dados da pesquisa

A Figura 4 explica, com outras palavras, que o movimento da bola, em uma cobrança de falta, pode descrever uma trajetória oblíqua, em que a bola sobe, p força aplicada pelo jogador, ao mesmo tempo em que se desloca para frente e é puxada para baixo pela força gravitacional.

**Figura 4** - Extrato 3 do G2 referente à modalidade futebol

Faltas com barreira são mais difíceis de serem contornadas - literalmente falando. Para isso, o cobrador terá que aplicar Força para alterar o vetor velocidade da bola e desviá-la da barreira rumo ao gol. Aplicando o princípio de inércia, perceberemos que a bola em movimento tende a continuar em movimento retilíneo uniforme. A força gravitacional também entra em jogo quando falamos de chutes de longa distância. Ela é responsável por puxar a bola para baixo, fazendo o chute formar um arco.

**Fonte:** Dados da pesquisa

As informações obtidas durante essa fase de familiarização com a temática os alunos coletaram todas as informações e destacaram aquelas que acreditaram ser as mais relevantes.

Nos casos dos extratos das Figuras 2, 3 e 4, o Grupo 2 (G 2 – futebol) ressalta elementos da Física, os quais foram importantes para a construção de seus modelos na segunda fase da Modelagem, mesmo que ainda não estivessem conscientes disso.

Os extratos apresentados demonstram a integração do ensino de Matemática com outra área do conhecimento, enfatizada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCNEM como importante para o desenvolvimento de competências, possibilitadas por uma aprendizagem de

Matemática de maneira contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos (BRASIL, 2000).

O Grupo 3 (G3 - salto ornamental), já na primeira fase da Modelagem, demostra a percepção do conteúdo matemático de Função Quadrática, conforme explicitado na Figura 5. Explica que, ao saltar, como no caso dessa modalidade, o centro de gravidade do atleta descreve uma parábola.

**Figura 5 -** Extrato 4 do G3 referente à modalidade salto ornamental

**O Elo Matemática-Esporte**

Em determinados esportes, quando um atleta salta, seu centro de gravidade (baricentro) descreve uma **trajetória parabólica**, desprezando-se os efeitos de resistência do ar.

**Fonte:** Dados da pesquisa

No extrato da Figura 5, fica evidente, a perspectiva contextual da Modelagem proposta por Kaiser e Sriraman (2006), uma vez que o propósito é estimular a aprendizagem de conteúdo matemático de forma contextualizada, ou seja, a partir de situações que façam sentido para o aluno. Ainda nesta fase da Modelagem, algumas alunas declararam estar motivadas com o desenvolvimento da atividade proposta, como segue em uma conversa.

> *A5: Eu... Eu gostei... (risos)*
> *A6: Também gostei. Na vida, a gente só vê professor de Matemática... só com lista de exercício, prova... isso é legal... gostei.*

Percebe-se, pelas falas, que a atividade de Modelagem em sala de aula provocou motivação quanto ao ensino de Matemática, que é uma característica da perspectiva contextual de Kaiser e Sriraman (2006).

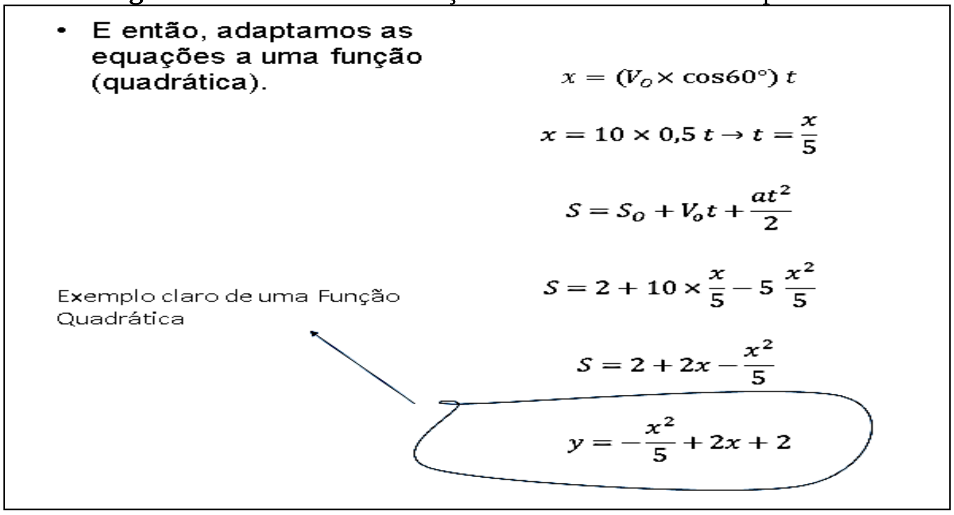
Na seção a seguir, serão analisados como quatro, dos seis grupos, encontraram seus respectivos modelos.

*Compreensão e Explicitação*

Nessa categoria, analisou-se como os grupos encontraram seus respectivos modelos. Dos seis grupos, quatro encontraram um modelo que representava a sua respectiva modalidade: basquete, futebol, salto ornamental e vôlei, possibilitando investigar o movimento do objeto/corpo.

Para efeito de análise, são utilizados extratos do Grupo 1 (G1 – basquete) e Grupo 2 (G2 – futebol). A figura 6 mostra os procedimentos adotados pelo G1 para chegarem ao modelo de sua modalidade, em que a velocidade e o ângulo de arremesso foram primordiais.

**Figura 6** - Processo de obtenção do modelo encontrado pelo G1



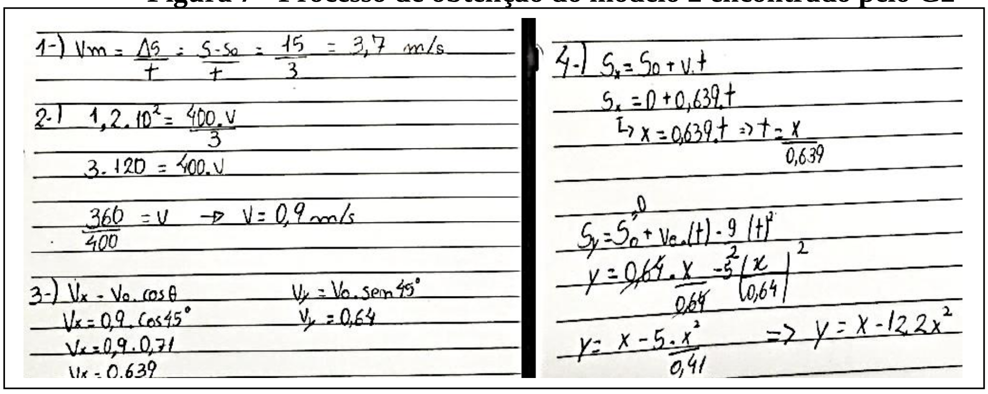

**Fonte:** Dados da pesquisa

O G1 utilizou-se de elementos da Física para encontrar um modelo que representasse a situação elaborada por ele, ou seja, elaborou seu modelo tomando como base um modelo da Física, de movimento uniformemente variado. Conforme afirma Biembengut (2016, p. 189), isso é perfeitamente viável pois,

> De acordo com o conteúdo que objetivamos desenvolver, elaboramos um modelo ou tomamos um modelo pronto de alguma área do conhecimento que nos permite adaptá-lo para o ensino de alguma turma de estudantes. Isto é, adaptamos o processo para que os estudantes aprendam o conteúdo do programa curricular e, ao mesmo tempo, a elaborar um modelo – *modelagem*.

Ao não conseguirem validarem o primeiro modelo, os alunos do Grupo 2 (G2 – futebol) fizeram uma nova tentativa. Para isso, utilizaram a força empregada pelo jogador no momento da cobrança do pênalti que, pelas informações obtidas, equivale a 120N[1], ilustrada na figura 7.

**Figura 7 - Processo de obtenção do modelo 2 encontrado pelo G2**



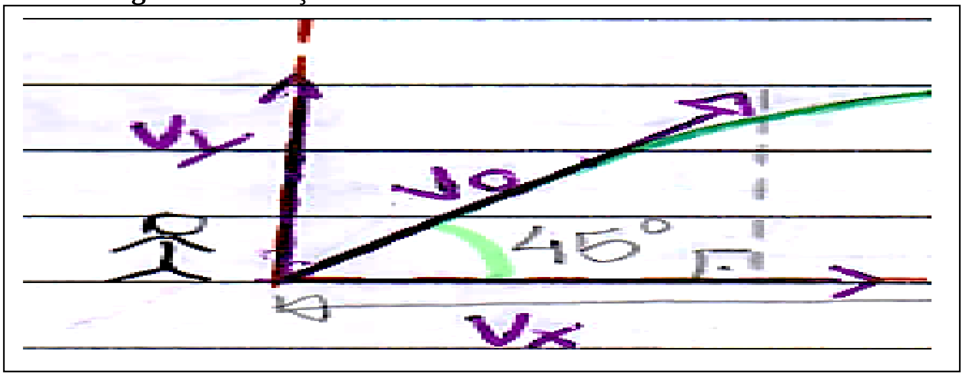

**Fonte:** Dados da pesquisa

---
[1] 120N = 120 Newton, unidade usada na Física para medir a força.

Em *2-)*, o grupo 2 (G2 – futebol) utilizou a relação $F = m \cdot a$, em que $F$ é a força do jogador ao chutar a bola, $m$ é a massa da bola e $a$ é aceleração desse objeto. Como a = $\frac{V}{t}$, a relação estabelecida foi: F = m. $\frac{V}{t}$, encontrando outro valor para a velocidade.

Para os cálculos em *3-)*, utilizaram as informações expressas na figura 8.

**Figura 8 -** Esboço ilustrativo do vetor velocidade do G2




**Fonte**: Dados da pesquisa

Essa figura mostra que o grupo 2 (G2 – futebol) estava atento ao fato de que, em um lançamento oblíquo, a velocidade é um vetor que forma um ângulo com o eixo horizontal e, por conseguinte, um triângulo retângulo. Assim, aplicou as relações trigonométricas do seno e do cosseno para encontrar os dois componentes da velocidade (Vx e Vy), sugerido pela professora e explícito no diálogo a seguir com a aluna A15.

> *P: Como é um lançamento oblíquo... que que vai acontecer... a gente vai ter um ângulo envolvendo aqui... um ângulo de inclinação. Na horizontal, o eixo Ox é chamado eixo dos cossenos e o eixo Oy é chamado eixo dos senos. Então, por isso, no lugar de Vy, temos V vezes o seno.*
> *A15: Pera... isso aqui é vezes o seno?*
> *P: Isso. Aqui é um triangulozinho ne?* – perguntou a professora a respeito da figura geométrica formada.
> *A15: É.*
> *P: Em todo triângulo retângulo, a gente tem o cateto oposto ao ângulo.*
> *A15: Cateto oposto é esse?* – perguntou a aluna apontando para a projeção de Vy, – *então, esse aqui é a hipotenusa*. – Constatou ela mostrando para o vetor Vo. *E esse...*
> Como a aluna não se lembrava do nome do outro cateto, a professora completou:
> *P: Cateto adjacente*

Nesse momento, a aluna mostrou compreender que era necessário outro conhecimento matemático, sobre relações trigonométricas no triângulo retângulo, para prosseguir com seu raciocínio. Sobre isso, Biembengut (2016) corrobora dizendo que o professor precisa ensinar ao aluno a se inteirar sobre o conteúdo curricular que ainda desconhece, mas que se mostra relevante e ainda destaca que, “embora não faça parte do programa curricular da disciplina, se houver tempo disponível e se for conveniente, podemos apresentar também estes conceitos mesmo que informalmente” ( BIEMBENGUT, 2016, p. 199).

A próxima seção analisa de que maneira os grupos validaram, ou não, seus respectivos modelos.

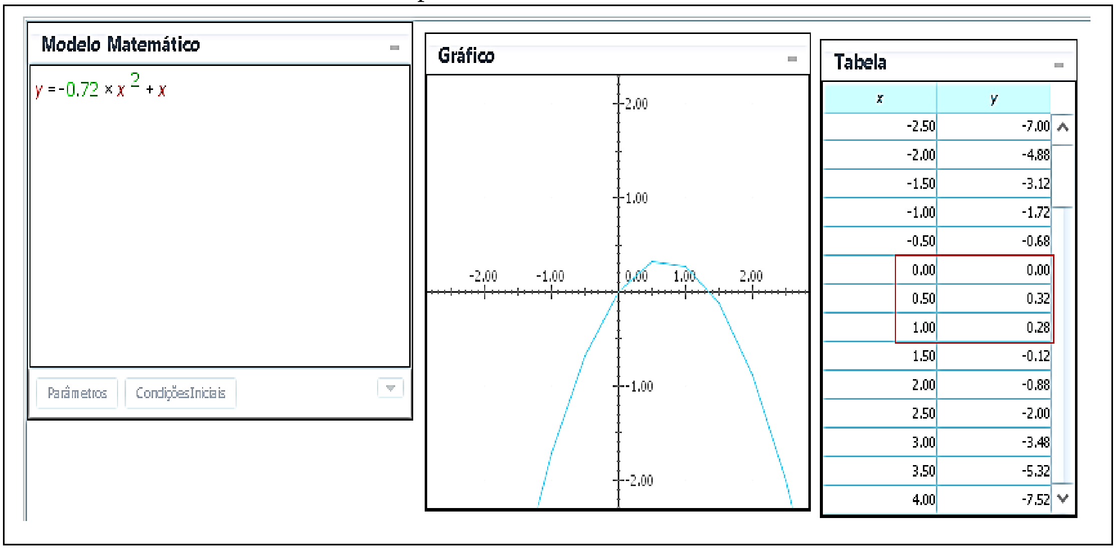
*Significação e Expressão*

Na terceira fase de Modelagem, os grupos que encontraram o modelo foram instruídos a implementá-lo no *software* Modellus. Dos quatro grupos que encontraram um modelo que representasse a modalidade olímpica investigada, somente o grupo que analisou o futebol não conseguiu validar o seu, mas justificou o motivo do ocorrido.

Para Bassanezi (2015, p. 22), “a validação de um modelo é um processo de aceitação ou rejeição deste”. Como o objetivo é estudar o conteúdo matemático Função Quadrática por meio da Modelagem Matemática em sala de aula, nesse processo, o critério de análise é confrontar os dados reais com os resultados fornecidos pelo modelo, destacando características essenciais do fenômeno que respalde esse estudo, a fim de compreender o seu comportamento.

O Grupo 2 (G2 – futebol) apresentou dois modelos, para a modalidade investigada e o primeiro está explícito na figura 9.

**Figura 9** - Modelo 1 e representações gráfica e numérica da trajetória da cobrança de pênalti apresentados no Modellus

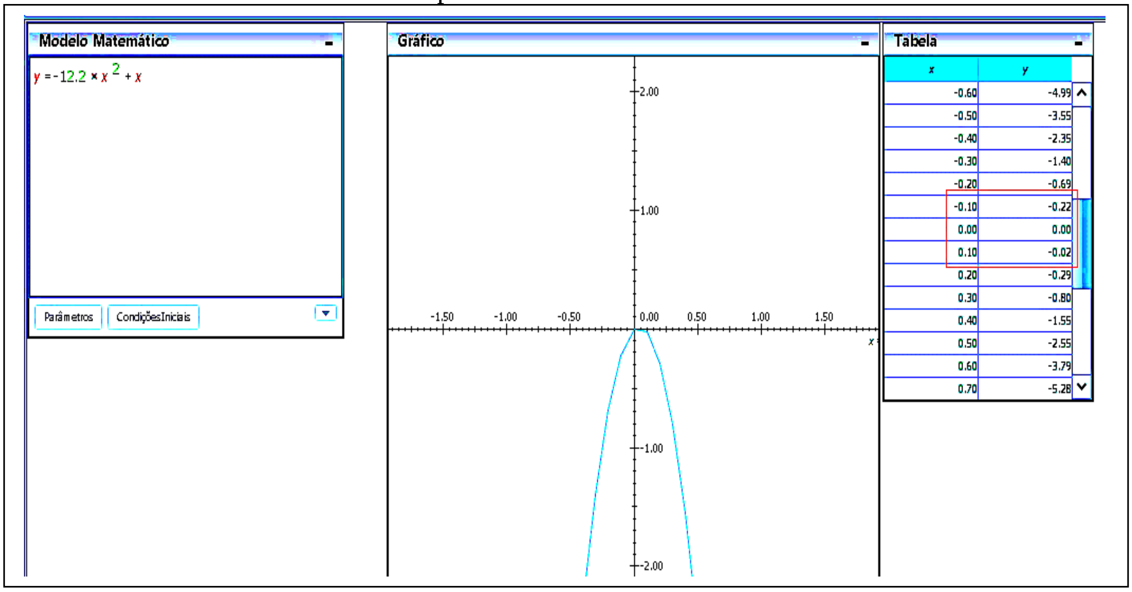



**Fonte:** Dados da pesquisa

Para este modelo, o Grupo 2 (G2 – futebol) utilizou o valor de 3,7 m/s para a velocidade, alcançando uma distância de um pouco menos do que 1,5 metro em relação ao gol e um pouco mais do que 32 cm de altura. Ao observar que esse modelo não respondia à questão investigada, o grupo voltou à fase dois – *compreensão e explicitação* – e identificou que era preciso considerar a força empregada pelo jogador em uma cobrança de pênalti.

Para a aquisição de um segundo modelo, o Grupo 1 (G1 – basquete) considerou a força de 12N, encontrada nas pesquisas da primeira fase. A figura 10 ilustra o novo modelo encontrado.

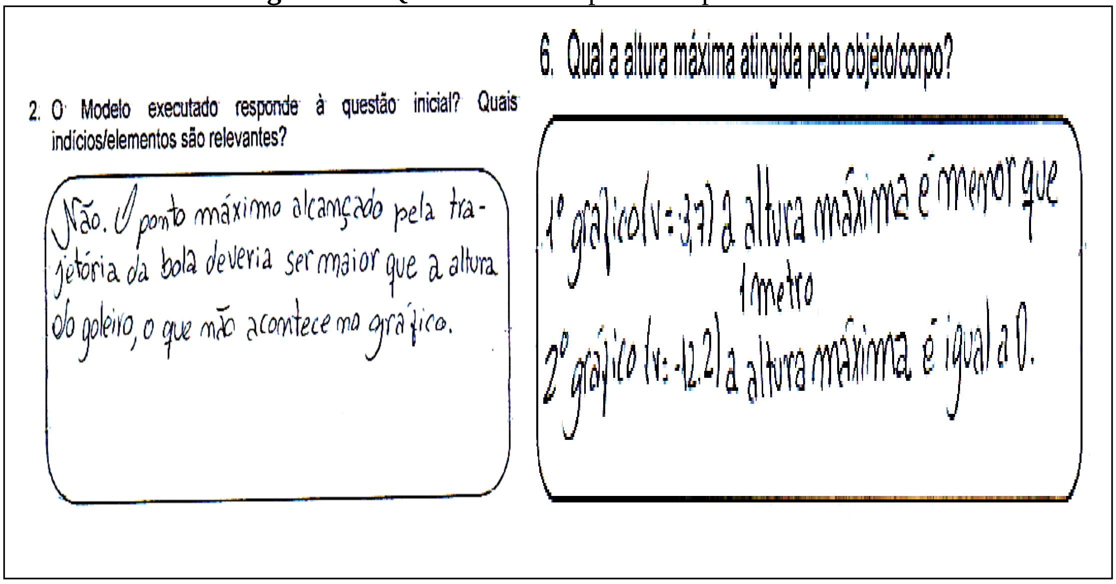
**Figura 10 -** Modelo 2 e representações gráfica e numérica da trajetória da cobrança de pênalti apresentados no Modellus




**Fonte:** Dados da pesquisa

Apesar da nova tentativa, o Grupo 2 (G2 – futebol) evidenciou que, como o primeiro modelo, este também não respondia ao questionamento investigado, haja vista que, nesse caso, a bola aparenta nem sair do chão, como mostra a resposta dada às questões 2 e 6, ilustrada na figura 11.

**Figura 11 -** Questão 2 e 6 respondidas por G2




**Fonte:** Dados da pesquisa

Mesmo não encontrando um modelo que traduzisse a modalidade olímpica em uma linguagem matemática, esse processo foi extremamente importante para estimar contribuições ao estudo da

Função Quadrática, como, por exemplo, na conversa entre a professora e alguns alunos durante o seminário apresentado pelo Grupo 2 (G2 – futebol).

> *A15 (integrante do grupo): No segundo modelo, a bola nem sobe.*
> *P: Por que os modelos não responderam ao questionamento? Por que a gente não conseguiu validar os modelos?*
> *A15: A gente observou que, no primeiro modelo, o valor que multiplica x² é menor que no segundo.*
> *AX: (não identificado no áudio): A gente repara que, quanto maior a velocidade... a gente repara que vai ser menor o número que multiplica x².*

Foi sistematizado que, quanto maior a velocidade, menor o valor que multiplica x² (coeficiente *a*) e maior alcance o objeto terá. Graficamente, à medida que o valor do coeficiente *a* aumenta, mais comprimido será o gráfico. O aluno A4 concluiu que seria necessário aumentar ainda mais a força, no intuito de responder ao questionamento do Grupo 2 (G2 – futebol). Essa sugestão é evocada por Biembengut e Hein (2013) como precedente para a possível retomada da fase 2 e melhoria do modelo.

A partir dos modelos construídos pelos alunos e das discussões ocorridas em sala de aula, no momento da sistematização dos modelos, foi introduzido o conceito de Função Quadrática. Para isso, foi escolhido o modelo relativo a modalidade salto em piscina $y=10+1,74x–0,2x^2$, pelo fato de que $c \neq 0$, em que a professora procurou levar os alunos a refletirem sobre que tipo de função, como é possível perceber em sua conversa com os alunos:

> *P: Quem sabe me dizer que tipo de função esse modelo representa?*
> *AX1 (não identificado no áudio): Do 2º grau.*
> *AX2 (não identificado no áudio): Quadrática.*
> *P: Por quê? Por quê?*
> *AX3 (não identificado no áudio): Por que tá ao quadrado.* – o aluno se referia à variável x do coeficiente *a*.
> *AX4 (não identificado no áudio): Tem um elemento quadrático lá.*
> *A21: Eu posso falar que é parabólica? O gráfico dela?*
> *A27: A representação gráfica desse movimento é parabólico. É uma parábo*la.

Nesse momento, os alunos demonstram compreender que a principal característica de uma Função Quadrática é a variável *x* estar elevada ao quadrado, relacionando essa função com uma curva parabólica, a qual vem a ser a representação gráfica dela.

Em prosseguimento, a professora apresentou a definição formal de Função Quadrática e indagou:

> *P: Por que a é diferente de zero?*
> *A27: Por que anula, né?*
> *AX(não identificado no áudio): Por que senão passa a ser do 1º grau*

Pela conversa acima, os alunos sistematizaram que a condição para que a Função Quadrática exista é o coeficiente *a* ser diferente de zero. A Modelagem Matemática possibilitou aos alunos a apreensão de um conceito, nesse caso, de Função Quadrática, por meio de outra área do conhecimento, confirmado por Bassanezi (2010).

Nessa categoria de análise - *Significação e Expressão* -, transparece a perspectiva educacional indicada por Kaiser e Sriraman (2006), uma vez que visa estimular a aprendizagem e promover a compreensão de conceitos matemáticos a partir de suas inter-relações com o mundo real, de maneira que os alunos aplicaram a Matemática para resolver problemas práticos.

**Considerações finais**

Este artigo teve como objetivo analisar as possíveis contribuições da Modelagem Matemática à aprendizagem de Função Quadrática. Para tanto os alunos, dispostos em grupos, foram mobilizados a construírem seus próprios modelos a partir do tema esportes olímpicos, por meio de uma intervenção de ensino.

O trabalho em grupo foi primordial, uma vez que oportunizou a partilha de conhecimento e socialização do que estava sendo aprendido. Essa aprendizagem partiu de uma temática familiar aos alunos: esportes olímpicos, que possibilitou relacionar um conteúdo matemático a um contexto real.

Essa conexão com uma situação da realidade proporcionou um novo olhar dos estudantes para a Matemática, vislumbrando-a como constituinte importante na solução de seus questionamentos. Nesse processo de Modelagem, pode-se perceber mudança significativa na postura dos alunos, que se comportaram não como meros assimiladores de conteúdo, mas como construtores de seus próprios conhecimentos matemáticos.

Os estudantes foram mobilizados a enfrentar e ultrapassar as barreiras existentes entre as disciplinas, avistando novas possibilidades de aprender um conteúdo matemático. Nessa direção, eles se depararam com um cenário em que, para investigar um assunto, foi preciso adentrar no universo da Física, outra área do conhecimento.

Salienta-se uma ruptura com o paradigma tradicional e a descentralização da figura do professor, que precisou ter nova postura e agir como orientador e mediador. A atitude permitiu que os alunos apreendessem o conceito relativo à Função Quadrática, mesmo de maneira intuitiva, assim como possibilitou que o conteúdo fosse desenvolvido por eles.

As três fases da Modelagem propiciaram aos alunos a aprendizagem não somente em Matemática, mas em outra área - a Física -, pois foi necessário empreender conhecimentos dessa área para que o processo evoluísse. Nessa direção, destaca-se também uma diferenciação no relacionamento entre professor e aluno, visto que as interações entre eles geraram novas aprendizagens.

O tempo foi entrave relevante ao desenvolvimento da intervenção de ensino. Foram previstos oito encontros, a princípio, mas, no desenrolar das fases, foi necessário estender o tempo para explorá-las de maneira suficiente.

As duas primeiras fases, *Percepção e Apreensão*; *Compreensão e Explicitação*, solicitaram mais dos alunos, pois, uma vez coletado todo tipo de informação relacionada ao tema/assunto, eles precisaram averiguar quais dados e informações eram realmente relevantes para a obtenção do modelo.

Esse processo não é simples, pois requer senso crítico dos alunos e tempo suficiente para que fizessem as devidas escolhas, assim como requer do professor orientação adequada para auxiliá-los nessa seleção.

A principal contribuição da Modelagem para o ensino de Matemática, foi no que tange à construção e ao entendimento do conceito de Função Quadrática, mesmo que de maneira informal. Os estudantes concluíram que a condição para a existência dessa função é o termo $x^2$, em que a representação gráfica consiste em uma curva denominada parábola.

Evidenciaram a existência e importância do parâmetro $a$, o qual está correlacionado à velocidade do corpo/objeto (quanto maior a velocidade menor o valor de $a$) e, consequentemente, maior será o seu alcance. Perceberam que, graficamente, o parâmetro $a$ implica a abertura da parábola, e quanto menor o valor dele, maior será a abertura dessa parábola, portanto, uma relação inversa.

Houve contribuição também na formulação de conjecturas, quando os alunos sistematizaram que era preciso aumentar a força do atleta para que a velocidade do corpo/objeto aumentasse; dessa forma aumenta também a altura máxima atingida e o alcance dele.

O processo de Modelagem estimulou a aprendizagem de Função Quadrática de forma significativa, para os alunos, uma vez que foi ancorada em situações reais de outro campo do conhecimento. Houve contribuição para o despertar do senso crítico nos estudantes, se não em todos, mas em boa parte, pois argumentaram sobre fatores que interferiam no processo investigativo, como, por exemplo, a força empregada pelos atletas.

A Modelagem Matemática possibilitou aos alunos não somente aprender o conteúdo Função Quadrática, mas a se posicionar de maneira diferente nas situações investigativas, deixando de atuar em sala de aula como simples expectadores e tornando-se indivíduos ativos e pensantes.

Assim como também proporcionou à professora enxergar que o seu papel vai além de levar o conhecimento matemático para a sala de aula, mas de auxiliar seus alunos na construção desse conhecimento, orientando-os nessa busca e que, dessa forma, o ensino se torna mais proveitoso e a aprendizagem mais instigante e motivadora.

**Referências**

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2010.

______. **Modelagem matemática**: teoria e prática. São Paulo: Contexto. 2015.

BELTRÃO, M. E. P.; IGLIORI, S. B. C. Modelagem matemática e aplicações: abordagem para o ensino de funções. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.12, n.1, pp.17-42, 2010.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem na educação matemática e na ciência**. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2013.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio**. Ciências da Natureza Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2000.

DAMIANI, M. F. et al. Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de Educação**, n. 45, p. 57–67, maio/ago. 2013.

FORTES, E. V.**;** JÚNIOR, A. W. S.; OLIVEIRA, A. M. L. O uso da modelagem matemática no ensino de funções nas séries finais do ensino fundamental: um estudo de caso. **Revista Itinerarius Reflectionis**, v. 2, n.15, 2013.

GODOY, E. V. **Currículo, cultura e educação matemática**. Campinas, SP: Papirus, 2015.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B.. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM: the International Journal on Mathematics Education**, v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006. Disponível em: <http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm063a9.pdf>. Acesso em: 13 set. 2016.

NASCIMENTO, R. A. Modelagem matemática com simulação computacional na aprendizagem de funções. 2007. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE.

PAGUNG, C. M. D. **Construção do conceito de função em um ambiente de modelagem matemática**: estuda da renda de uma associação de reciclagem de resíduos sólidos. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, ES.

PIRES, R. F. **O uso da modelação matemática na construção do conceito de função**. 2009. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica (PUC), São Paulo.

POSTAL, R. F.; HAETINGER, C.; DILLIUS, M. M.; SCHOSSLER, D. C. Atividade de modelagem matemática visando-se a uma aprendizagem significativa de funções afins, fazendo uso do computador como ferramenta de ensino. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**. v.4, n.1, p.153-173, 2011.

SOARES, D. S.; JAVARONI, S. L. Análise de modelos: possibilidades de trabalho com modelos matemáticos em sala de aula. In: BORBA, M. C; CHIARI, A. (Org.). **Tecnologias digitais e educação matemática**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

**Recebido em 31/07/2018**

**Aceito em 06/11/2018**

**Sobre as autoras**

**Silvana Costa Silva**

Possui graduação em licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (2006). Especialista em Metodologia do Ensino da Matemática e Física. Mestra em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Santa Cruz (2018). Professora de Matemática do Instituto Federal da Bahia (IFBA) campus Vitória da Conquista/Ba. Integrante do Grupo de Estudos em Educação Matemática (GEEM), coordenado pelo prof. Dr. Claudinei de Camargo Sant'Ana.

**Zulma Elizabete de Freitas Madruga**

Doutora em Educação em Ciências e Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS), com período de estágio doutoral realizado na Universidade de Salamanca (USAL), Espanha. Possui Mestrado em Educação em Ciências e Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS), Especialização em Educação Matemática pela Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), Especialização em Educação - Ênfase em Gestão de Polos pela Universidade Federal de Pelotas (UFPEL). Licenciatura em Matemática pela Universidade da Região da Campanha (URCAMP) e Licenciatura em Pedagogia pelo Centro Universitário Internacional (UNINTER). Possui experiência na Educação Básica, Ensino Fundamental e Médio. Atualmente é professora visitante na Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC) - Ilhéus, Bahia, atuando como docente do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática (PPGEM_UESC). Líder do Grupo de Pesquisa Educação Matemática e Diversidade Cultural (GPEMDiC).

**Flaviana dos Santos Silva**

Doutora em Educação: Currículo - PUC/SP (2014) com período Sanduiche na Universidade do Minho, Portugal. Mestre em Educação (2007) e licenciada em Matemática (2002) pela FCT/UNESP. Atualmente é docente na Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC - Ilhéus/Bahia atuando como docente nos cursos de graduação e pós-graduação. É coordenadora da área de Matemática no PIBID e coordenadora de projetos de pesquisa e de ensino na UESC. Entre os anos de 2008 a 2010 foi coordenadora adjunta UAB do NEAD-UESC; e entre 2014 a 2016 atuou como coordenadora de

Tutoria no curso de Especialização em Gestão Pública Municipal a distância UAB-NEAD/UESC.Foi docente no Instituto de Ensino Superior de Presidente Prudente IESPP/UNIESP durante os anos de 2005 a 2007 e tutora no projeto de Inclusão Digital da Rede do Saber de São Paulo em parceria com a Casa Civil - SP, Instituto Tecnológico da USP - IPT - USP e Fundação Vanzoline de SP em turmas do curso de informática Básica no período de 2004 a 2006. Foi bolsista do Programa Internacional de Bolsas de Pós-graduação da Fundação Ford.