RECONCEITUALIZANDO AS QUATRO OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS

LOURDES DE LA ROSA ONUCHIC
LUCIENE SOUTO BOTTA

Aritmética é a parte da Matemática que trabalha sobre números, estabelecendo relações, definindo operações e identificando propriedades.

Recentemente, muitas pesquisas em Educação Matemática têm ressaltado a necessidade de se enfatizar, através da resolução de problemas, os conceitos matemáticos, sobrepondo-os às regras e técnicas que são memorizadas e, para muitos, esquecidas. Diante da necessidade de se dar ênfase aos conceitos matemáticos, Shulman (1978) nos chama a atenção ao dizer que: "Um lugar de pesquisa crítica é aquele onde a produção de novos conhecimentos leva a uma reconceitualização dramática tanto na área pesquisada como em outras áreas ...". Pensando nestes dizeres e relacionando-os aos conceitos das quatro operações fundamentais da aritmética, sentimos que é preciso refletir sobre a reconceitualização de números e das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. A natureza do número, em suas diferentes operações, muda enquanto nos movemos de adicionar e subtrair para multiplicar e dividir números inteiros. Muda, mais ainda, quando passamos das operações com inteiros para as operações com números racionais.

Em qualquer domínio de pesquisa, é muito útil parar e voltar, periodicamente, para observar nosso campo de trabalho. É preciso analisar "o que sabemos" e "o que deveríamos saber, mas não sabemos" e em que direção deveríamos nos mover, para achar respostas aos questionamentos que vão surgindo.

Nos primeiros anos, o trabalho das crianças, com número, é feito com os números inteiros e elas operam, sobre eles, adicionando e subtraindo. Contar é sua primeira atividade. O desenvolvimento da capacidade de contar pode ser caracterizado, de início, como uma sofisticação crescente no tratamento da unidade (Fuson, 1988; Steffe, von Glasersfeld, Richards & Cobb, 1983). As crianças mudam de "contar somente objetos concretos" para "contar os próprios números como unidades". Apesar da unidade, nesse período, ser um ente único, o número um, a aquisição de uma conceitualização madura de unidade é um processo protelado e reconhecidamente exigente.

Nos anos seguintes, as operações mudam de adição e subtração para multiplicação e divisão e os números mudam de inteiros para racionais. É claro que, agora, o conteúdo número não é uma simples extensão daquele dos anos iniciais. Há, agora, muita coisa nova e desafiadora, tanto para os alunos quanto para os professores. Como é que são construídas as noções básicas de multiplicação e divisão de números inteiros e de números racionais? Reconceitualizações importantes fazem-se necessárias. Em 1985, Fischbein, Deri, Nello e Marino anunciaram sua hipótese de que "cada operação fundamental da aritmética geralmente permanece ligada a um modelo primitivo intuitivo, implícito e inconsciente".

Pesquisadores atuais da Educação Matemática, preocupados com as dificuldades encontradas pelos alunos na matemática escolar, buscam reconceitualizar as noções já consagradas de números e operações, para poderem identificar razões causadoras dessas dificuldades. A reconceitualização das operações fundamentais se torna necessária para atender aos diferentes tipos de problemas presentes no nosso mundo, relacionados a cada uma delas, já que os problemas do mundo são modelados por elas.

Até pouco tempo atrás, pensava-se que as idéias refletidas, pelas quatro operações fundamentais, eram: a adição, o processo de juntar coisas de mesma natureza; a subtração, a operação inversa da adição, a idéia de tirar uma quantidade de outra; a multiplicação, o processo de adicionar, repetidamente, parcelas iguais; e a divisão, a idéia de reconhecer quantas vezes alguma coisa cabe em outra.

Numa visão recente sobre as quatro operações, com inteiros positivos, observa-se que as idéias subjacentes a estas operações não são tão simples, são complexas. É preciso tomarmos consciência de que, para cada uma das quatro operações, há diferentes tipos de problemas que são resolvidos por uma mesma operação.

A adição pode estar relacionada às idéias de "mudar adicionando", de "combinar fisicamente" e de "combinar conceitualmente". Os problemas de subtração podem se apresentar com três espíritos distintos: o "mudar subtraindo", o "igualar" e o "comparar" (Fuson, 1992). Os problemas de multiplicação podem ser gerados a partir de "grupos iguais", de "comparação multiplicativa", de "produto cartesiano" e de "área". Finalmente, os problemas de divisão modelam tipos diferentes de divisão: a "divisão partitiva", a "divisão quotitiva" e a "divisão cartesiana" (Greer, 1992). Toda esta complexidade de idéias dificulta a compreensão, na criança, dos conceitos de adição, subtração, multiplicação e divisão, pois a ela são colocadas situações-problema com "espíritos operatórios diferentes" mas que são resolvidas por um mesmo algoritmo.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO COMO MODELOS DE SITUAÇÕES

Nos livros escolares de matemática das séries iniciais vê-se que, num primeiro momento, cuida-se da adição, depois, da subtração e, quando problemas são colocados, essas operações são realizadas com algoritmos diferentes, que foram trabalhados como independentes.

Pesquisas realizadas nesse campo indicam que as operações de adição e subtração nas séries iniciais deveriam ser trabalhadas a partir de "problemas aditivos e subtrativos" que permitissem desenvolver, simultaneamente, os conceitos de adição e subtração. Esse trabalho deveria ser feito, concomitantemente, com o trabalho da construção do significado dos números naturais. Só depois disso, é que se cuidaria de conectar os símbolos aos conceitos de adição e subtração; e os problemas aditivos e subtrativos, como membros de uma mesma família, não poderiam ser classificados separadamente.

A compreensão das crianças em adição e subtração de números inteiros tem sido foco de muita pesquisa nos últimos anos. Fuson (1992) nos coloca que há quatro situações básicas para a adição e subtração: Comparar, Combinar, Mudar Adicionando e Mudar Subtraindo. Quando há duas quantidades, podemos compará-las ou combiná-las. As situações Comparar e Combinar são operações binárias, nas quais dois números são operados para produzir um terceiro, que é único. Quando há apenas uma quantidade, podemos acrescentar a esta ou tirar desta uma nova quantidade. As situações de "Mudar Adicionando" ou de "Mudar Subtraindo" acabam sendo operações unitárias, nas quais só um número inicial dado é operado de modo a produzir um terceiro. Além das

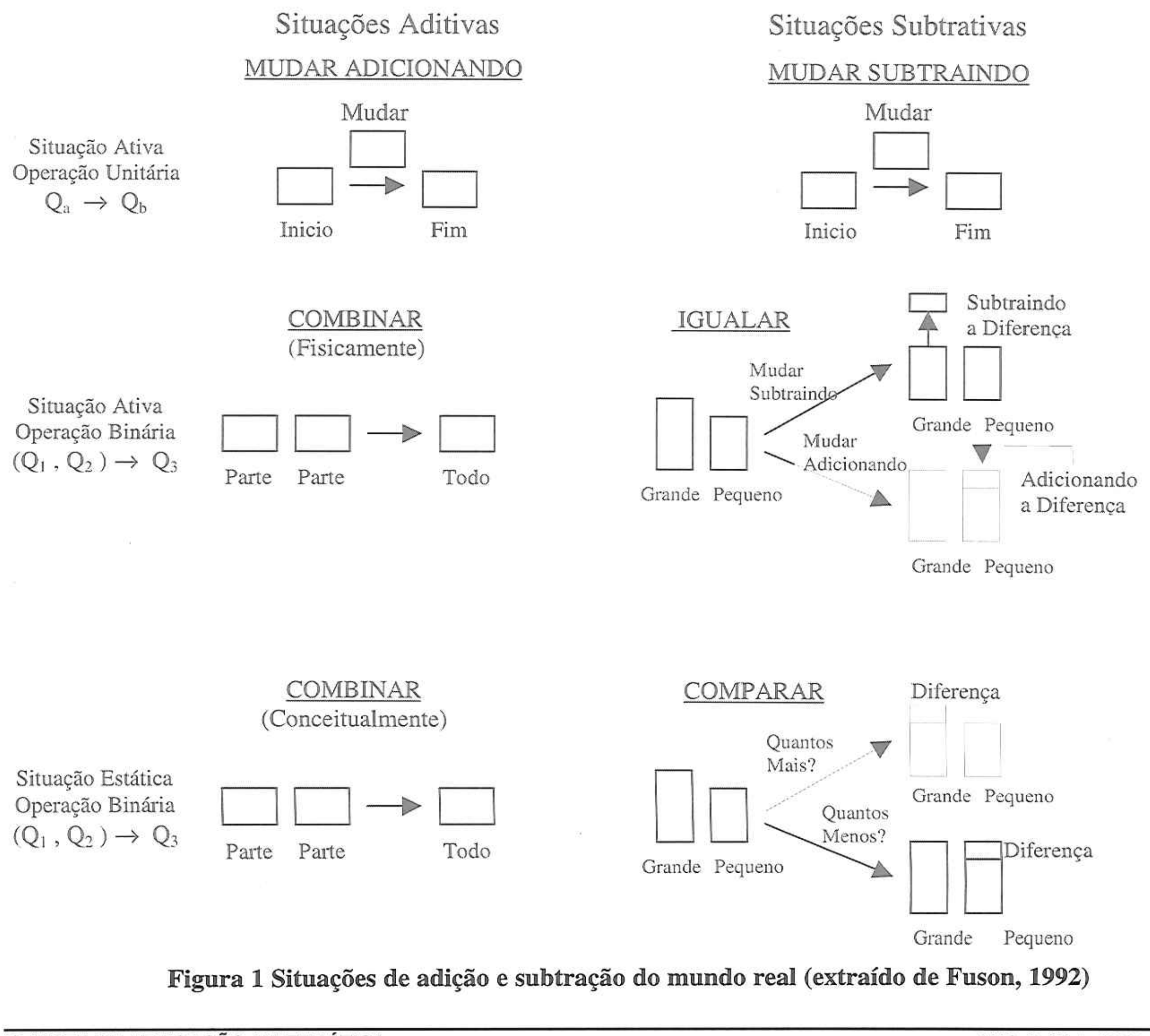


Figura 1 Situações de adição e subtração do mundo real (extraído de Fuson, 1992)

quatro situações citadas, há uma outra chamada de Igualar, que é combinação dos problemas de Comparar e de Mudar, nos quais a diferença entre duas quantidades é expressa pelas ações de Mudar Adicionando ou Mudar Subtraindo. Estas situações estão resumidas na Figura 1.

Sabemos que cada situação de adição e subtração envolve três quantidades, sendo que qualquer uma delas pode ser a desconhecida. Para cada uma dessas situações há, então, três problemas correspondentes, como podem ser vistos no Quadro 1. Estes são apresentados na seqüência das dificuldades (da menor para a maior) que as crianças têm ao resolverem os problemas. Na situação Combinar, pode-se distinguir uma primeira parte oculta de uma segunda parte oculta. Como estas partes usualmente diferem pouco conceitualmente em situações reais, essa distinção não foi considerada no trabalho de Fuson e portanto resultaram apenas dois tipos de problemas da situação Combinar.

A adição é uma operação que produz uma soma a partir de duas parcelas conhecidas, e a subtração é uma operação que produz uma das parcelas a partir de uma soma conhecida e da outra parcela conhecida. Assim, duas dessas quatro situações principais são situações aditivas (Combinar e Mudar Adicionando) enquanto as outras duas são situações subtrativas (Comparar/Igualar e Mudar Subtraindo). Entretanto, dentro de cada uma das quatro situações, um dos três problemas requer uma operação de adição para achar a resposta (o problema no qual as duas parcelas são conhecidas) e os outros dois problemas (aqueles nos quais a soma e uma parcela são conhecidas) requerem uma operação de subtração para achar a resposta. Então há uma importante distinção a ser feita entre a situação-problema e a operação (adição ou subtração) requerida para achar a quantidade desconhecida, isto é, há uma distinção entre a situação-problema e o procedimento de achar a solução.

O Quadro 1 mostra a variedade de situações que envolvem adições e subtrações. São 7 problemas diferentes de adição e 15 diferentes situações ligadas à subtração. Podemos inferir, com isso, as dificuldades que as crianças enfrentam ao resolver essas 22 situações conhecendo apenas os algoritmos da adição e da subtração.

SITUAÇÕES ADITIVAS	SITUAÇÕES SUBTRATIVAS	
Mudar Adicionando	**Mudar Subtraindo**	
Fim Oculto	**Fim Oculto**	
Pedro tinha 3 maçãs. Ana deu a ele mais 5 maçãs. Quantas maçãs Pedro tem agora?	João tinha 8 bolinhas de gude. Ele deu 5 bolinhas para Toni. Quantas bolinhas de gude João tem agora?	
Mudança Oculta	**Mudança Oculta**	
Katia tem 5 canetas. Quantas canetas a mais ela tem que juntar a essas para ficar com 7 canetas?	Fred tinha 11 doces. Ele perdeu alguns deles e ficou com 4 doces. Quantos doces Fred perdeu?	
Começo Oculto	**Começo Oculto**	
Bruno ganhou 2 bolachas. Agora ele tem 5 bolachas. Quantas bolachas Bruno tinha no início?	Karen tinha alguns problemas com enunciado. Ela fez 22 deles e ainda tem 79 para resolver. Quantos problemas ela tinha no início?	
COMBINAR FISICAMENTE	**IGUALAR**	
	Adicionar	**Subtrair**
Total Oculto	**Diferença Desconhecida**	**Diferença Desconhecida**
Sara tem 6 donuts com açúcar e 9 donuts simples. Ela colocou todos em um prato. Quantos donuts há sobre o prato?	Suzana tem 8 bolinhas de gude. Fred tem 5. Quantas bolinhas de gude Fred tem que ganhar para ficar com a mesma quantidade de Suzana?	Jane tem 7 bonecas. Ana tem 3 bonecas. Quantas bonecas Jane teria que perder para ficar com o mesmo número de bonecas de Ana?

Parte Oculta	Sentença Modificada Sugere a Solução	Sentença Modificada Sugere a Solução
João e Toni ficam com 8 bolinhas quando colocam todas suas bolinhas juntas. João tem 3 bolinhas. Quantas bolinhas tem Toni ?	Há 6 meninos em um time de futebol. Mais 2 meninos juntaram-se ao time. Agora há o mesmo número de meninos quanto de meninas no time. Quantas meninas estão no time?	Havia 11 copos sobre a mesa. Eu tirei 4 deles e, portanto, estaria com o mesmo número de copos e de pratos sobre a mesa. Quantos pratos estavam sobre a mesa?
	Sentença Modificada Sugere Procedimento de Solução Oposto	**Sentença Modificada Sugere Procedimento de Solução Oposto**
	César tem 13 bolinhas de gude. Se Júlio ganhar 5, terá o mesmo número de bolinhas de gude que César. Quantas bolinhas Júlio tem?	Havia algumas meninas no grupo de dança. Quatro delas sentaram-se e assim cada menino pôde ter uma parceira. Há 7 meninos no grupo de dança. Quantas meninas estão neste grupo?
COMBINAR CONCEITUALMENTE	**COMPARAR**	
Total Oculto	**Diferença Desconhecida**	**Diferença Desconhecida**
Há 6 meninos e 8 meninas num time de futebol. Quantas crianças estão no time?	João tem 3 balões. Sua irmã tem 5 balões. Quantos balões a mais sua irmã tem?	Janice tem 8 chicletes. Tom tem 2. Quantos chicletes Tom tem a menos que Janice?
Parte Oculta	**Sentença Modificada Sugere a Solução**	**Sentença Modificada Sugere a Solução**
Beatriz tem 14 flores. Oito delas são vermelhas e o restante amarelas. Quantas flores amarelas ela tem?	Luís tem 6 peixinhos ornamentais. Carla tem 2 mais que Luís. Quantos peixinhos tem Carla?	O leiteiro trouxe, no domingo, 11 garrafas de leite e na segunda 4 garrafas menos. Quantas garrafas ele trouxe na segunda?
	Sentença Modificada Sugere Procedimento de Solução Oposto	**Sentença Modificada Sugere Procedimento de Solução Oposto**
	Maria tem 9 blusas. Ela tem 5 blusas mais que Suzi. Quantas blusas tem Suzi?	Júlio tem 5 bolinhas de gude. Ele tem 8 bolinhas menos do que César. Quantas bolinhas tem César?

QUADRO 1. PROBLEMAS DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO COM NÚMEROS INTEIROS POSITIVOS (FUSON, 1992)

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO COMO MODELOS DE SITUAÇÕES

A pesquisa sobre multiplicação e divisão modificou-se no início dos anos 80 com o trabalho de Fischbein, Deri, Nello e Marino (1985). Eles concebiam que o modelo intuitivo primitivo para a multiplicação era o de adições repetidas e para a divisão era ou aquele baseado na partição ou aquele apoiado nas subtrações sucessivas.

Nos anos 90, Greer (1992) revela, em seu trabalho sobre multiplicação e divisão de números inteiros positivos, que uma certa complexidade se manifesta quando as operações são consideradas não somente de um ponto de vista do cálculo, mas em termos de como elas modelam situações. No trabalho com a matemática, em sala de aula, sente-se que a maior dificuldade encontrada por muitas crianças está no ato de decidir se um problema dado será modelado pela operação multiplicação ou divisão. A complexidade maior reside primeiro em tal percepção e, posteriormente, na resolução do algoritmo. Também as calculadoras não revelam se um determinado problema será solucionado pela operação multiplicação ou divisão. Quem decide isso é quem está operando com a máquina. Habilidade nas técnicas operatórias não é suficiente para se resolver problemas.

De acordo com Greer, as classes mais importantes de situações envolvendo multiplicação e divisão de inteiros positivos são: a de grupos iguais; a de comparação multiplicativa; a de produto cartesiano e a de área retangular.

a) Grupos iguais:

3 crianças têm 4 balas cada uma. Quantas balas têm ao todo?

Nesta conceitualização, os números do problema têm papéis diferentes: 3, o número de crianças, é o multiplicador e 4, o número de balas por criança, é o multiplicando. O multiplicador opera sobre o multiplicando. O multiplicador diz o número de vezes que o multiplicando vai se repetir, para produzir a resposta.

$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 12$$

multiplicador   multiplicando

Esta classe de situações multiplicativas, de adições repetidas, é considerada por Fischbein e outros, como o "modelo primitivo" da multiplicação. Por que, então, muitas crianças não sabem tabuada, se essa é a primeira noção de multiplicação que lhes é ensinada nas primeiras séries do ensino fundamental? Talvez seja porque elas não compreendem a multiplicação como adições repetidas. Seria mais fácil o seu entendimento e, após isso, a sua memorização, se fosse trabalhado que o primeiro fator - o multiplicador - indica quantas vezes o segundo fator - o multiplicando - vai ser adicionado. Se o aluno conhece o papel do multiplicador e do multiplicando, em uma situação de esquecimento saberá raciocinar. Se não se lembra quanto é 7×8, mas sabe que 6×8 é igual a 48, então basta adicionar mais uma vez a quantidade 8 a 48, resultando 56.

Como conseqüência desta distinção surgem dois tipos de divisão: a divisão partitiva, que significa repartir em iguais subcoleções ou subquantidades, e a divisão quotitiva, que significa determinar quantas subcoleções ou subquantidades de um dado tamanho estão contidas numa coleção ou numa quantidade.

Divisão Partitiva:

Há 12 balas e 3 crianças. Ao repartir-se igualmente as balas pelas crianças, quantas balas cada criança receberá?

12 balas	3 crianças
	4 balas/criança

Este tipo de divisão, em que o total de balas foi dividido pelo número de crianças, é um exemplo de divisão partitiva. É o dividir uma quantidade em subquantidades.

Divisão Quotitiva:

Se há 12 balas e quero dar 4 balas para cada criança, quantas crianças poderão ganhar esse número de balas?

12 balas	4 balas/criança
0	3 crianças

$$\begin{array}{r} 12 \text{ balas} \\ -\ 4 \text{ balas} \\ \hline 8 \text{ balas} \\ -\ 4 \text{ balas} \\ \hline 4 \text{ balas} \\ -\ 4 \text{ balas} \\ \hline 0 \end{array}$$

(o divisor foi extraído 3 vezes do dividendo)

Este tipo de divisão, em que o total de balas foi dividido pelo número de balas que cada criança deve receber, é um exemplo de divisão quotitiva. Vamos determinar quantas crianças irão receber aquele número determinado de balas.

Estes dois tipos de divisão, partitiva e quotitiva, são considerados modelos primitivos de divisão por Fischbein e outros.

Na divisão partitiva, o dividendo é repartido no número de partes especificadas pelo divisor e o resultado, chamado quociente, é o tamanho de cada uma das partes. Na divisão quotitiva, o divisor especifica uma medida que será repetidamente extraída do dividendo, e o quociente será um número puro, o número de quotas.

Neste trabalho, o importante é proporcionar às crianças muitas experiências com esses dois tipos de divisão, de modo que elas possam trabalhar com segurança em cada um deles.

b) Comparação Multiplicativa:

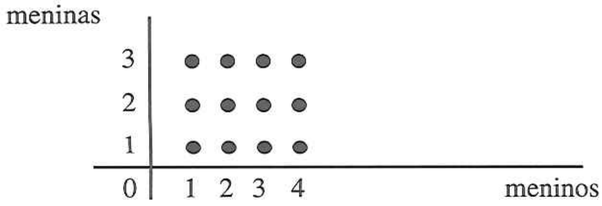
João tem 3 vezes mais maçãs do que Maria. Maria tem 4 maçãs. Quantas maçãs tem João?

O fator multiplicativo 3 é o multiplicador. É possível ver essa situação em termos de uma correspondência "muitos para um": 3 maçãs de João para 1 maçã de Maria. Da comparação multiplicativa 3 □ 4 maçãs = 12 maçãs, sairiam as correspondentes divisões partitiva e quotitiva.

c) Produto Cartesiano:

A multiplicação definida através de um produto cartesiano é recente. Os produtos cartesianos dão um contexto bastante diferente da multiplicação de números naturais. Consideremos o seguinte problema:

Se há 4 meninos e 3 meninas numa festa, quantos diferentes casais poderão ser formados para dançar?

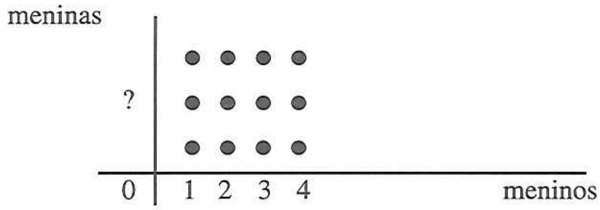


Poderão ser formados 12 diferentes casais.

Como neste tipo de multiplicação há uma simetria entre os papéis dos dois números contidos no problema, então, surge somente um tipo de divisão, chamado de quociente cartesiano.

Quociente Cartesiano:

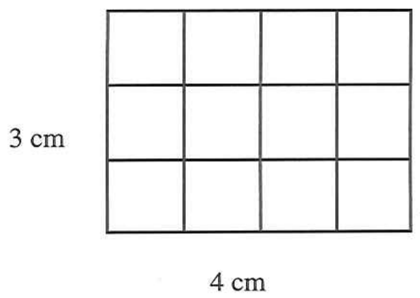
Desde que se podem formar 12 diferentes casais e que, nos dançarinos, 4 são meninos, quantas são as meninas? Ou, se há 12 casais e 3 são meninas, qual o número de meninos?



Observamos que este caso considera conjuntos discretos.

d) Área Retangular:

Uma figura retangular tem lados de 4cm e 3cm. Qual a área desta figura?



Neste caso, o retângulo é inteiramente dividido em quadrados de 1 cm de lado e, portanto, 1 cm^2 de área. A área é encontrada pela contagem desses quadrados, resultando numa área de 12 cm^2.

Este caso é aquele do produto cartesiano aplicado a conjuntos contínuos e, como um produto cartesiano, os papéis desempenhados pelos números multiplicados são equivalentes. Então, não há dois tipos distintos de problemas de divisão envolvendo esta situação.

$$12\text{ cm}^2 \;\underline{|\;3\text{ cm}\;}\qquad\qquad 12\text{ cm}^2 \;\underline{|\;4\text{ cm}\;}$$
$$4\text{ cm}\qquad\qquad\qquad\qquad 3\text{ cm}$$

Concluímos dizendo que:

Em qualquer conjunto numérico trabalhado, N, Z, Q ou $\Re$, os conceitos das operações são sempre os mesmos e o domínio desses conceitos nos permite resolver problemas.

As operações mudam de adição e subtração para multiplicação e divisão. Os números mudam, de números inteiros para números racionais. Por baixo de todas as mudanças de nível superficial, está uma mudança fundamental com ramificações distantes: uma mudança na natureza da unidade.

"Enquanto situações aditivas precisam somente envolver quantidades que são derivadas do meio e quantificadas por contagem ou medida, as situações multiplicativas quase sempre requerem a manipulação de relações entre as quantidades. E, de novo, a mudança não é trivial" (Hiebert & Behr, 1991).

Hiebert e Behr ao destacarem as relações entre habilidade com a aritmética iniciante e a aritmética de outras séries, dizem: "O domínio de muitos dos conceitos numéricos e das relações numéricas, num período mais avançado, parece requerer uma reconceitualização de número, isto é, uma mudança significativa no modo pelo qual o número é concebido, a partir das primeiras séries (Kieren; Schwartz; Steffe; Vergnaud).

Dadas as mudanças fundamentais na natureza do número, não será surpreendente que reorientações cognitivas significantes sejam necessárias para construir e compreender tais mudanças. Isto significa que é provável não haver caminhos contínuos suaves da adição e subtração para a multiplicação e divisão, nem dos números inteiros para os números racionais. A multiplicação não é, simplesmente, adição repetida; e números racionais não são, simplesmente, pares ordenados de números inteiros. Os novos conceitos não são as somas dos conceitos anteriores. Habilidade em trabalhar com conceitos numéricos, no período de quinta a oitava séries, requer uma ruptura com os conceitos mais simples do passado e uma reconceitualização do número em si mesmo. Na realidade, a reconceitualização de número e relações numéricas ocorre, neste ponto, somente para uma minoria de estudantes. Muitos deles continuam a usar conceitos de números inteiros para resolver problemas com números fracionários e simples estratégias aditivas para resolver problemas multiplicativos".

Os problemas, nas primeiras séries do ensino fundamental, de divisão com números inteiros têm sempre o dividendo maior (ou múltiplo) do que o divisor. Desta forma, o quociente é também um número menor que o dividendo. Devido às inúmeras vezes que as crianças fazem divisões deste tipo, muitas são levadas a achar que a divisão de dois números sempre leva a um resultado menor que a quantidade inicial considerada. Posteriormente, na divisão com números racionais, as crianças têm um impacto diante de situações como 2 ÷ 0,25 , onde o resultado, 8 , é maior que o dividendo 2.

Outra idéia construída nas primeiras séries do ensino fundamental é a noção de que não se pode dividir por um número maior que o dividendo. Isto não é verdade nos números racionais. Um grande passo para os estudantes compreenderem essa idéia, da divisão com o dividendo menor que o divisor, é a compreensão do surgimento de um número "diferente", expresso como a / b, $b \neq 0$, como solução para $a \div b$, com $a \langle b$ e $b \neq 0$ e que torna a divisão sempre possível. Em Onuchic e Botta (1997) e Botta (1997) são feitas sugestões para se trabalhar os conceitos de números racionais e as operações sobre eles, de um modo significativo.

Classe	Problema de Multiplicação	Divisão (pelo multiplicador)	Divisão (pelo multiplicando)
Grupos iguais	3 crianças têm, cada uma, 4 laranjas. Quantas laranjas elas têm juntas?	12 laranjas são distribuídas igualmente entre 3 crianças. Quantas ganha cada uma?	Se você tem 12 laranjas, para quantas crianças pode dar 4 laranjas?
Medidas iguais	3 crianças têm 4,2 litros de suco de laranja cada uma. Quanto suco de laranja elas têm juntas?	12,6 litros de suco de laranja é repartido igualmente entre 3 crianças. Quanto cada uma recebe?	Se você tem 12,6 litros de suco de laranja, a quantas crianças você pode dar 4,2 litros?
Taxa	Um barco se move a uma velocidade constante de 4,2 metros por segundo. Até onde ele se moverá em 3,3 segundos?	Um barco se move 13,9 metros em 3,3 segundos. Qual é sua velocidade média em metros por segundo?	Quanto tempo um barco leva para mover-se 13,9 metros a uma velocidade de 4,2 metros por segundo?
Conversão de medida	Uma polegada mede cerca de 2,54 centímetros. Quanto medirão 3,1 polegadas em centímetros?	3,1 polegadas são cerca de 7,87 centímetros. Aproximadamente quantos centímetros há em uma polegada?	Uma polegada é aproximadamente 2,54 centímetros. Qual é aproximadamente o comprimento em polegadas de 7,87 centímetros?
Comparação multiplicativa	O peso do ferro é 0,88 vezes do peso do cobre. Se um pedaço de cobre pesa 4,2 kg, quanto pesa um pedaço de ferro do mesmo tamanho?	O peso do ferro é 0,88 vezes do peso do cobre. Se um pedaço de ferro pesa 3,7 kg, quanto pesa um pedaço de cobre do mesmo tamanho?	Se pedaços de igual tamanho de ferro e cobre pesam 3,7 Kg e 4,2 kg respectivamente, quão pesado é o ferro em relação ao cobre?
Parte / todo	Uma escola aprovou 3/5 de seus estudantes em um exame. Se 80 estudantes fizeram o exame, quantos passaram?	Uma escola aprovou 3/5 de seus estudantes em um exame. Se 48 passaram, quantos estudantes fizeram o exame?	Uma escola aprovou 48 dos 80 estudantes que fizeram um exame. Que fração dos estudantes passou?
Mudança multiplicativa	Um pedaço de elástico pode ser esticado até 3,3 vezes seu comprimento original. Qual é o comprimento de um pedaço de 4,2 metros quando completamente esticado?	Um pedaço de elástico pode ser esticado até 3,3 vezes seu comprimento original. Quando completamente esticado ele tem 13,9 metros de comprimento. Qual era seu comprimento original?	Um pedaço de elástico de 4,2 metros de comprimento pode ser esticado para 13,9 metros. Qual é o fator pelo qual ele está sendo encompridado?
		DIVISÃO	
Produto cartesiano	Se há 3 caminhos de A para B e 4 caminhos de B para C, quantas maneiras diferentes há para se ir de A para C via B?	Se existem 12 caminhos diferentes de A para C via B e 3 caminhos de A para B, quantos caminhos há de B para C?	
Área retangular	Qual é a área de um retângulo de 3,3 metros de comprimento por 4,2 metros de largura?	Se a área de um retângulo é 13,9 m2 e o comprimento é 3,3 m, qual é a largura?	
Produto de medidas	A potência de um aquecedor é 3,3 Quilowatts de eletricidade. Se usado durante 4,2 horas quantos Quilowatts-hora ele consome?	Um aquecedor consome 3,3 Quilowatts por hora. Por quanto tempo ele pode ser usado com 13,9 Quilowatt-hora de eletricidade?	

QUADRO 2. SITUAÇÕES MODELADAS POR MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO (GREER, 1992)

No Quadro 2, Greer faz a extensão dos tipos de problemas de multiplicação e divisão de inteiros para a multiplicação e divisão de racionais e, conseqüentemente, surgem diferentes tipos de problemas. Sua classificação baseia-se na distinção entre o multiplicador (o que faz a ação) e o multiplicando (o que sofre a ação).

Analisando o Quadro 2, nota-se que, para as diferentes idéias associadas aos conceitos de multiplicação e divisão, há muitos modelos diferentes de problemas.

Gostaríamos de ressaltar que alunos e professores deveriam ser levados, através de um trabalho com muitos e variados problemas, a perceber que há, nos diferentes contextos, diferentes idéias, onde muitas delas são trabalhadas com um mesmo algoritmo.

Lourdes de la Rosa Onuchic
ICMSC - USP e UNESP - RC
Luciene Souto Botta
Mestre em Educação Matemática pela UNESP - RC

BIBLIOGRAFIA

BEHR, M.J., HAREL, G., POST, T., LESH, R. Rational number, ratio and proportion. In: GROUWS, D. A. (Ed.). Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan, 1992. p. 296-333.

BOTTA, LUCIENE S. Números racionais e raciocínio proporcional: considerações sobre o ensino-aprendizagem. Rio Claro: UNESP, 1997. 185 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - IGCE, UNESP, 1997.

FISCHBEIN, E., DERI, M., NELLO, M., & MARINO, M. The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. Journal for Research in Mathematics Education, 1985, 16, p. 3-17.

FUSON, K. C. Research on whole number addition and subtraction. In: GROUWS, D. A. (Ed.). Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan, 1992. p. 243-275.

GREER, B. Multiplication and division as models of situations. In: GROUWS, D. A. (Ed.). Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan, 1992. p. 276-295.

HIEBERT, J. & BEHR, M. Introduction: capturing the major themes. In: ____. (Eds.). Number concepts and operations in the middle grades. 3. ed. Reston: LEA, NCTM, 1991. p. 1-18.

KIEREN, T.E. Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In: HIEBERT, J. & BEHR, M. (Eds.). Number concepts and operations in the middle grades. 3. ed. Reston: LEA, NCTM, 1991. p. 162-181.

ONUCHIC, L.R., BOTTA, L.S. Uma nova visão sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais. Revista de Educação Matemática, São Paulo, Ano 5, n. 3, p. 5-8, jan. 97.

SCHWARTZ, J.L. Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In: HIEBERT, J. & BEHR, M. (Eds.). Number concepts and operations in the middle grades. 3. ed. Reston: LEA, NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), 1991. p. 41-52.

STEFFE, L. P., VON GLASERSFELD, E., RICHARDS, J., & COBB, P, Children's counting types: Philosophy, theory, and application. New York: Praeger, 1983.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: HIEBERT, J. & BEHR, M. (Eds.). Number concepts and operations in the middle grades. 3. ed. Reston: LEA, NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), 1991. p. 141-161.