

DA REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE PADRÕES NUMÉRICOS ATRAVÉS DE MOSAICOS COM MOTIVOS QUADRADOS E HEXAGONAIS COM AUXÍLIO DO LOGO¹

Davi de Souza²
Eurípides Alves da Silva³

RESUMO: O presente trabalho exhibe uma interessante estratégia de associação entre seqüências numéricas e mosaicos geométricos, propiciando a exploração educacional do fascinante universo dos padrões de repetição e suas simetrias. Os mosaicos são elaborados a partir de réplicas isométricas de motivos quadrados e motivos hexagonais (ver [2], [3] e [4]), construídos com auxílio da linguagem Logo de programação.

PALAVRAS-CHAVE: seqüências numéricas; mosaicos geométricos; padrões de repetição; simetrias; linguagem Logo de programação.

I NTRODUÇÃO

“O matemático, como o pintor ou o poeta, é um construtor de padrões. Tanto os padrões do matemático, como os do pintor ou do poeta, devem ser belos; as idéias, como as cores ou as palavras, devem combinar de modo harmonioso. Ocorre que os padrões do matemático são mais permanentes que os dos outros. É que são feitos de idéias.....”
(G. Hardy, in [5])

A geometria euclidiana, em vista de seu inegável e extraordinário papel básico de veículo de representação do espaço físico e de visualização e desenvolvimento de conceitos e idéias da matemática e das ciências em geral, sempre ocupou uma merecida posição de destaque nas propostas curriculares e, naturalmente, nos textos didáticos destinados aos diferentes níveis de ensino. Esta primazia, no entanto, como se sabe, pelo menos nos níveis iniciais de escolaridade, quase nenhum efeito prático tem revelado. Ao contrário, o que se tem visto é um desinteresse cada vez maior por parte dos professores – e, por conseqüência, dos alunos –, a tal ponto de hoje em dia já se temer pela sobrevivência da geometria euclidiana nos currículos correspondentes ao ensino fundamental. Na visão de muitos estudiosos, conforme já tivemos oportunidade de comentar em artigo publicado nesta mesma revista ([2]), as razões para o problema se concentrariam em dois aspectos principais. O primeiro deles se refere ao conteúdo programático da disciplina, considerado anacrônico em vista da excessiva ênfase emprestada aos aspectos axiomáticos, o que equivaleria, na prática, a ignorar as peculiaridades da organização do raciocínio e da construção das argumentações lógicas do aluno neste nível. O segundo se refere à própria abordagem desse conteúdo, considerada, por sua vez, demasiadamente distante do universo que compõe o interesse e por conseqüência os referenciais do aluno de hoje em dia. Alguns estudiosos costumam reduzir esse aspecto, se podemos dizer assim, às dificuldades que grande parte dos professores encontraria para conciliar a abordagem tradicional, através da qual eles próprios aprenderam o conteúdo que ensinam e ainda presente nos livros didáticos, com a tendência pragmatista (para muitos utilitarista) que estaria por trás da abordagem e dos próprios currículos modernamente empregados na escola básica.

Felizmente nas últimas décadas, com o advento da autonomia da Educação Matemática como área de pesquisa,

estudiosos e educadores matemáticos de todo o mundo têm jogado um pouco de luz sobre essa questão, cuja colaboração, disponível em revistas e textos especializados, inclusive nacionais, já começa a encontrar eco nos textos didáticos e nas salas de aula. Neste contexto é que propomos o modesto trabalho aqui apresentado, cuja gênese se encontra num programa de estudo e pesquisa bem mais amplo, tendo por objeto, consoante uma série de projetos desenvolvidos pelos autores, o fornecimento de subsídios para uma abordagem mais abrangente, atraente e dinâmica da geometria plana, particularmente junto ao ensino fundamental. Embora correndo o risco de estender em demasia esta introdução, gostaríamos de dizer que a base deste programa assenta-se no reconhecido mérito educacional das transformações geométricas, a partir dos temas da pavimentação elementar do plano através de polígonos (incluindo as figuras poli-celulares, especialmente as triangulares, as quadrangulares e as hexagonais) e da construção de mosaicos ornamentais com ênfase à informática educativa, com auxílio especialmente da linguagem LOGO de programação e do software Cabri-Géomètre, na construção de padrões e na investigação das simetrias incorporadas. De fato, o estudo da regularidade de padrões de recobrimentos do plano pode modificar radicalmente a visão que os alunos costumam ter da geometria (baseada quase que exclusivamente no mero reconhecimento de figuras geométricas e na descrição de suas propriedades), favorecendo a consecução de objetivos educacionalmente importantes, como o desenvolvimento das habilidades de percepção de relações espaciais, particularmente a habilidade de percepção visual do aluno, uma faculdade importante considerando-se que 85% das informações que recebemos nos chegam através do sistema audiovisual. Por outro lado, não se pode negar o fascínio que o computador exerce sobre a criança em idade escolar, nem a necessidade de se introduzir a informática na escola como forma de se começar a assimilar o acelerado processo de reeducação tecnológica que a sociedade vem experimentando e as suas repercussões nas relações de ensino-aprendizagem.

Finalizando, a título de uma rápida referência à linguagem de programação utilizada no trabalho aqui proposto, gostaríamos de dizer que por força de sua gênese - derivada da linguagem LISP - e da própria premissa que caracteriza seu desenvolvimento - segundo a qual a programação deve se tornar um aliado na educação dos jovens - o LOGO tem favorecido a moderna tendência e o esforço de educadores matemáticos de se considerar a geometria euclidiana do ponto de vista das chamadas *múltiplas perspectivas*, caracterizadas por abordagens que aliam ao domínio de conteúdo a sua aplicação na natureza, nas ciências e, de um modo geral, na vasta gama de feitos e interesses do ser humano.



OBJETIVOS E METODOLOGIA

Não são poucas as pessoas que costumam resumir o principal objeto da matemática, pelo menos de um ponto de vista prático, como sendo a busca de modelos. Correta ou não, a premissa traz embutida a importância da estratégia da construção de modelos como forma de descrição e resolução de problemas no domínio das várias ciências. Por outro lado, é indiscutível o fascínio que atividades de criação de padrões de repetição, sejam numéricos, sejam geométricos, costumam exercer sobre as crianças em idade escolar.

Com base no mérito educacional dos processos, conceitos e idéias envolvidos neste gênero de atividade, este trabalho tem por objetivo introduzir uma interessante estratégia de associação entre padrões numéricos e padrões geométricos, ensejando a oportunidade de elaboração e desenvolvimento de atividades exploratórias bastante criativas e enriquecedoras junto ao universo dos mosaicos e padrões de repetição. Quais possíveis padrões numéricos estariam ocultos nas peculiaridades, em termos de simetria, regularidade, etc., de um determinado padrão geométrico? Reciprocamente, que geometria poderia ser associada ou, equivalentemente, que mosaico poderia ser associado a uma determinada sequência numérica, com base, por exemplo, na paridade de seus termos, na regularidade de repetição, ou numa eventual equivalência (congruência módulo n , por exemplo) entre seus termos? Que geometria poderíamos associar à sequência dos números naturais, ou a uma progressão geométrica qualquer, a uma tabuada, aos números triangulares ou à sequência de Fibonacci ?

A referida associação entre padrões numéricos e geométricos é construída, neste trabalho, com auxílio de motivos quadrados (ver [2] e [3]) e motivos hexagonais ([4]) ornamentados com segmentos retilíneos e curvilíneos. Réplicas congruentes destes motivos são adaptadas lado a lado, mediante um critério previamente estabelecido de identificação entre a réplica e o número da sequência. Os padrões geométricos, como já referidos, são construídos através da linguagem LOGO, com base em janelas de programação originais adrede preparadas.



RESULTADOS

Atualmente nossas investigações se concentram na oportunidade de enriquecimento do processo, seja através da criação de novos motivos poligonais, seja, na identificação de multi-estágios de associação entre sequências e mosaicos

(diferentes dos estágios duplos, do tipo falso-verdadeiro). Sabe-se, de antemão, que, uma vez restritos a motivos poligonais regulares, as opções de recobrimento lado-a-lado de um determinado retângulo ou faixa se limitam aos motivos triangulares, quadrados e hexagonais apenas.

Exibimos nas figuras a seguir alguns dos resultados obtidos. Por questão de espaço não detalhamos a construção de todos os mosaicos apresentados, não sendo difícil, porém, descobrir as estratégias de associação empregadas para cada um deles. Pelo mesmo motivo, também não apresentamos todos os Logo-procedimentos empregados na construção dos mosaicos.

1. Motivos quadrados

No que se refere aos motivos quadrados, os mosaicos exibidos nas figuras 1.1 e 1.2 correspondem à tabuada do 3, 6, 4 e 7, à seqüência (1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, ...) e à seqüência (1, 2, 3, 4, 5, ...) dos números naturais. Apenas as estratégias de construção dos mosaicos correspondentes às seqüências (1, 1, 2, 2, ...) e (6, 12, 18, ...) são comentadas a seguir.

Enfatizamos que os motivos e os mosaicos foram construídos com auxílio do LOGO (versão SLogoW), através das janelas de programação desenvolvidas para o Caleidostróton virtual ([2]).

1.1. Os mosaicos e as estratégias de associação

Com relação à seqüência (1, 1, 2, 2, ...), partindo de um quadriculado 10x10, iniciando pelo canto superior esquerdo, e da esquerda para a direita, ocupamos todas as suas 100 quadriculas colocando em cada uma delas um número da seqüência, segundo a ordem em que são dados. Em seguida, onde aparece o número "1"

colocamos o motivo  e onde aparece o número "2"

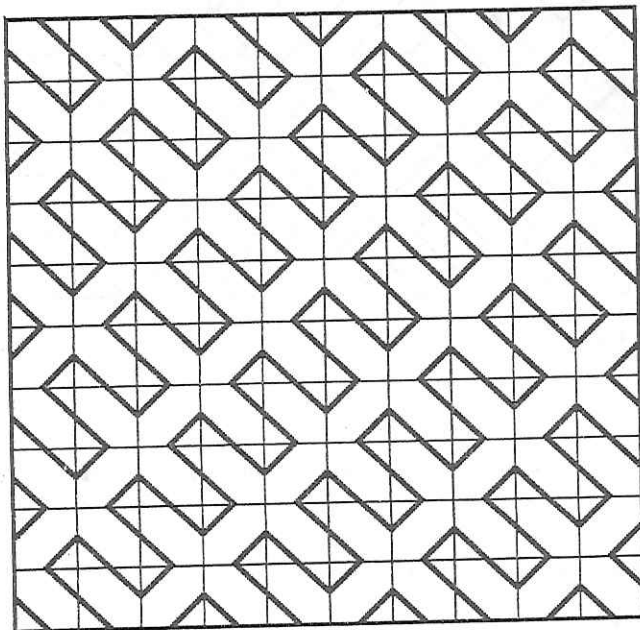
colocamos o motivo , que, como se vê, corresponde a uma rotação de 90° do motivo anterior. Ao final do processo tem-se desenhada a geometria da seqüência, evidentemente em função do critério de associação adotado.

Com relação à seqüência (6, 12, 18, ...), definida pela tabuada do seis, o procedimento é o seguinte: preenchidas as quadriculas com os números de 1 a 100,

em seguida os substituímos pelo motivo , se o

número não faz parte da seqüência, e pelo motivo , se o número faz parte da seqüência, isto é, se é múltiplo de 6.

TABUADA DO 3



TABUADA DO 4

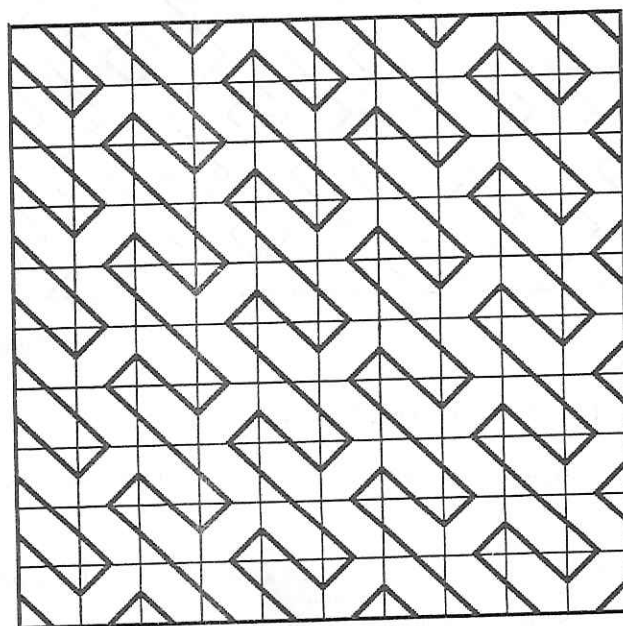
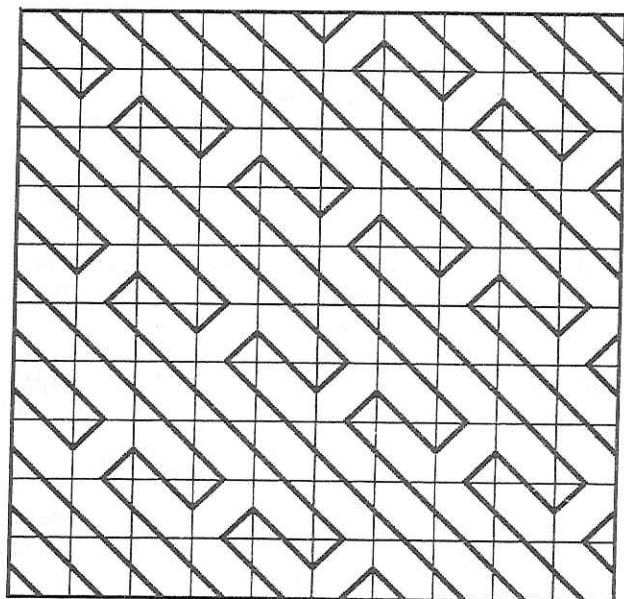


Figura 1.1a

TABUADA DO 6



TABUADA DO 7

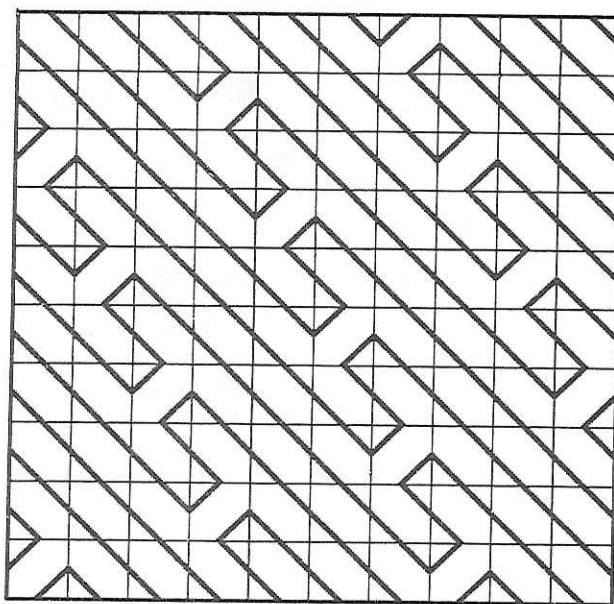
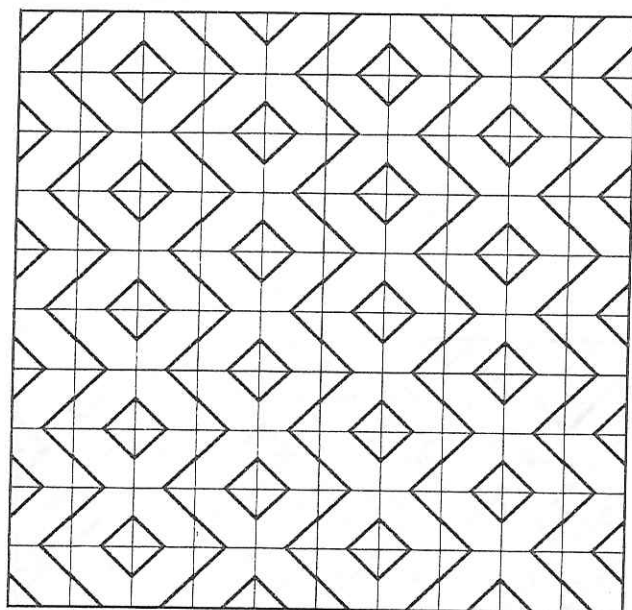


Figura 1.1b

SEQÜÊNCIA (1,1,2,2,1,1,2,2,...)



NÚMEROS NATURAIS

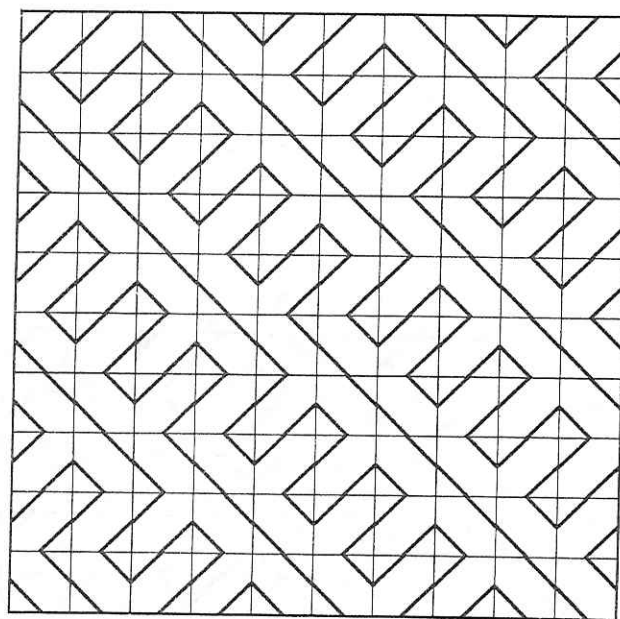


Figura 1.2

1.2. Os Logo-procedimentos

A seguir descrevemos os Logo-procedimentos que permitem construir os mosaicos relativos às figuras 1.1 e 1.2 apenas usando o mouse.

```
ap caleidostroton
criejanela "main "m [..... Demonstração do Caleidostroton..... ] 50 100 180 80
atr "g 0 minimize "comandos
criebotão "m "Saindo [Continuar...] 70 50 40 10 | atr "g :g+1 kk |
criestático "m "t | Bem vindo à Demonstração do Caleidostroton| 20 10 150 40
fim
```



```

ap Apa
senão :pi = [ ] [ ] [ mudepos rp "pi blocobit :a-1 :a-1 ]
fim

aprenda calei :r :s :t
atr "a :r atr "n :s atr "m :t
criejanela "main "Desenho "Desenhar 10 20 300 20 atr "k 1
criebotão "Desenho "começa "começa 0 0 30 10 [ começa ]
criebotão "Desenho "Saindo "Sair 270 0 20 10 [ apaguejanela "Desenho desativemouse ]
criebotão "Desenho "reto "reto 70 0 25 10 [ atr "k 1 ]
criebotão "Desenho "curvo "curvo 110 0 25 10 [ atr "k 3 ] mudecp "15
criebotão "Desenho "Apa "Apagar 150 0 32 10 [ Apa ]
recorte ativemouse [ mudeíndicebit :k centro ] [ ] [ mudeíndicebit 2*:k centro ] [ ] [ ]
minimize "comandos começa
fim

ap centro
un atr "mxy posmouse atr "i 1 atr "j 1
atr "mx elem 1 :mxy atr "my elem 2 :mxy
se :mx > :x [ se :my < :y [ se :mx < :x + :a*:n [ se :my > :y - :a*:m [ ~
enquanto [ (:n+1) > :i ] [ se :mx < :x + :a*:i [ mudex :x + :a*(i-1) atr "i :n ] atr "i :i+1 ] ~
enquanto [ (:m+1) > :j ] [ se :my > :y - :a*:j [ mudey :y - :a*:j atr "j :m+1 ] atr "j :j+1 ] ~
mudex coorx+1 blocobit :a-1 :a-1 ip "pi pos mudex coorx-1 colebit ] ] ]
fim

aprenda começa
tat un atr "x -300 atr "y 150 dt mudex :x mudey :y mudeel [ 1 1 ] ul atr "pi [ ]
repita 2 [ pd 90 pf :a*:n pd 90 pf :a*:m ] pf 1 pd 90 pf :a*:n pf 1 pd 90 pf :a*:m
pf 2 pd 90 pf :a*:n pf 2 pd 90 pf :a*:m pf 3 mudexy :x :y mudemodobit 3
pd 90 repita :n [ pf :a pd 90 pf :a*:m pt :a*:m pe 90 ]
pd 90 repita :m [ pf :a pd 90 pf :a*:n pt :a*:n pe 90 ]
pe 90 un mudex :x mudey :y mudeel [ 2 2 ] ul at pe 90 dt
fim

aprenda curvo :a
dt pe 45 un pf :a/2*raizq 2 pe 45 ul arco 90 :a/2 pd 45 un
pt :a*raizq 2 pd 135 ul arco 90 :a/2 un pe 135 pf :a/2*raizq 2 pd 45
fim

ap kk
se :g=1 [ mudeestático "t [ Caleidostroton é um ~
programa onde se pode montar mosaicos usando apenas o mouse ] ]
se :g=2 [ mudeestático "t [ Reproduza o mosaico desejado da seguinte maneira:-
Na próxima tela, leve a seta do mouse sobre um dos quadradinhos e clique ~
com o botão esquerdo ou o botão direito do mouse ] ]
se :g=3 [ apaguejanela "m calei 40 10 8 ]
fim

ap mouse
un pc pd 90 pf 150 pe 90 mudeel [ 1 1 ] ul pf 50 un pd 90 pf 25 ul arco 180 25 un pf 25
pd 90 ul pf 50 pd 90 un pf 25 ul arco 180 25 un pf 25 pd 90 pf 40 pd 90 ul pf 50 pt 25 pe 90 pf 35
; ate aqui mousee dt at
pe 20 un pt 20 pd 40 ul pf 40 pd 40 repita 7 [ un pf 30 pe 100 ul arco 100 30 un pt 30 pd 50 ]
pd 119 ul pf 45 pd 12 un pt 15 pinte un pt 50 pinte
pd 15 pf 75 pd 120 ul pf 50 pd 15 repita 7 [ un pf 30 pe 100 ul arco 100 30 un pt 30 pd 50 ] ul
pe 35 pt 50 un pf 130 md 0 pt 50 ul repita 4 [ pf 50 pd 90 ] mudeíndicebit 7 colebit un pd 90
pf 100 ul repita 4 [ pf 50 pe 90 ] mudeíndicebit 8 colebit
fim

ap recorte
tat reto :a un pt :a/2 pe 90 pf :a/2-1 mudeíndicebit 1 recortebit :a :a tat pe 90 reto :a pf :a/2+1
pd 90 pt :a/2 mudeíndicebit 2 recortebit :a :a tat curvo :a un pt :a/2 pe 90 pf :a/2
mudeíndicebit 3 recortebit :a :a tat pe 90 curvo :a pf :a/2 pd 90 pt :a/2 mudeíndicebit 6
recortebit :a :a tat reto 50 un pt 25 pe 90 pf 24 mudeíndicebit 7 recortebit 50 50 tat pd 90
reto 50 un pt 25 pd 90 pf 24 mudeíndicebit 8 recortebit 50 50 tat
fim

aprenda reto :a
mudeel [ 2 2 ] dt pe 45 un pf :a/4*raizq 2 pd 90 pf :a ul pt :a*2 un pf :a pd 90
pf :a/2*raizq 2 un pe 90 pf :a ul pt :a*2 un pf :a pe 90 pf :a/4*raizq 2 pd 45 at
fim

```

2

MOTIVOS HEXAGONAIS

Restringimo-nos, neste item, a um particular motivo hexagonal. Diferentemente do caso anterior, os motivos agora exibem ornamentos retilíneos e ornamentos curvilíneos ([4]).

Observemos ainda que, na verdade, empregamos réplicas de um mesmo hexágono regular, obtidas através das suas seis simetrias rotacionais, como mostra a figura 2, abaixo. Os números colocados sob as réplica têm por objetivo facilitar a identificação das seqüências geradoras dos mosaicos a serem exibidos adiante.

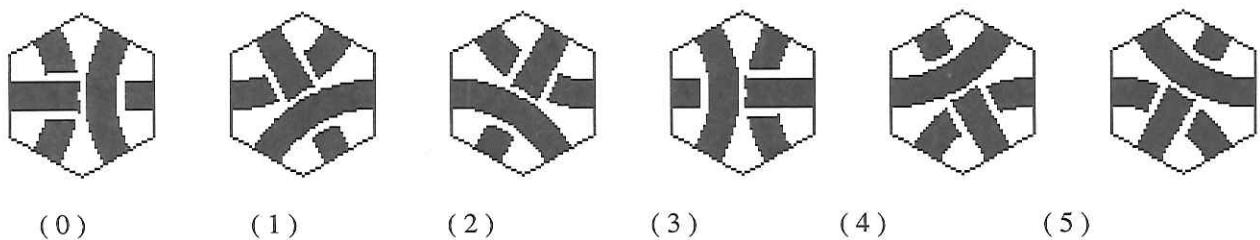
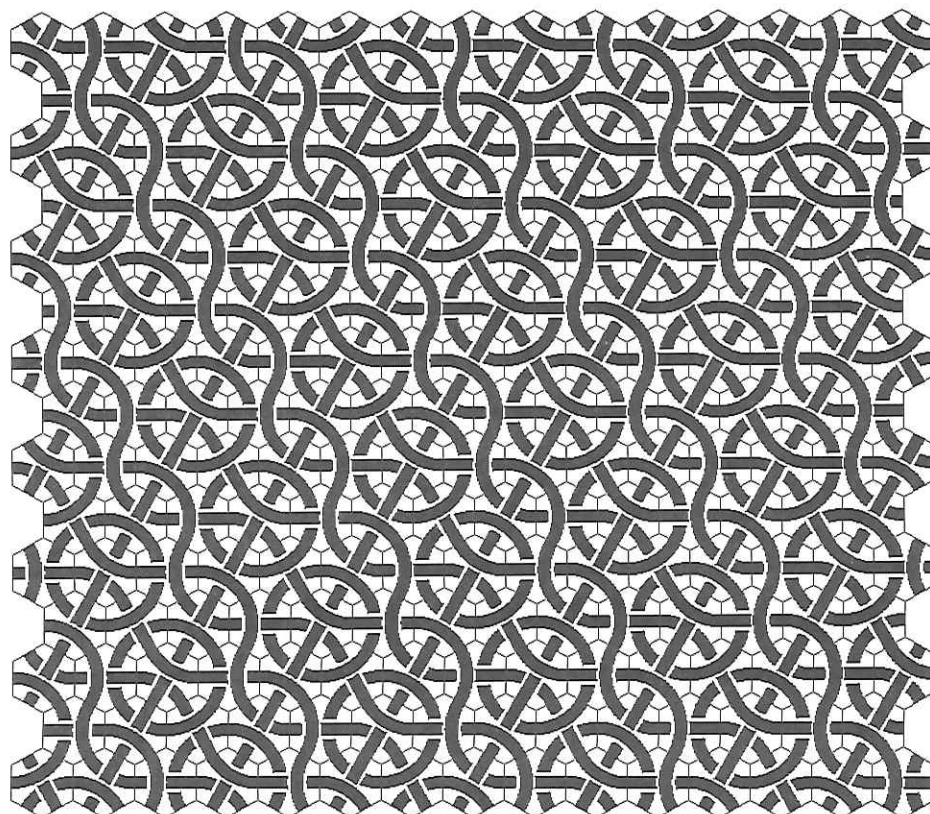


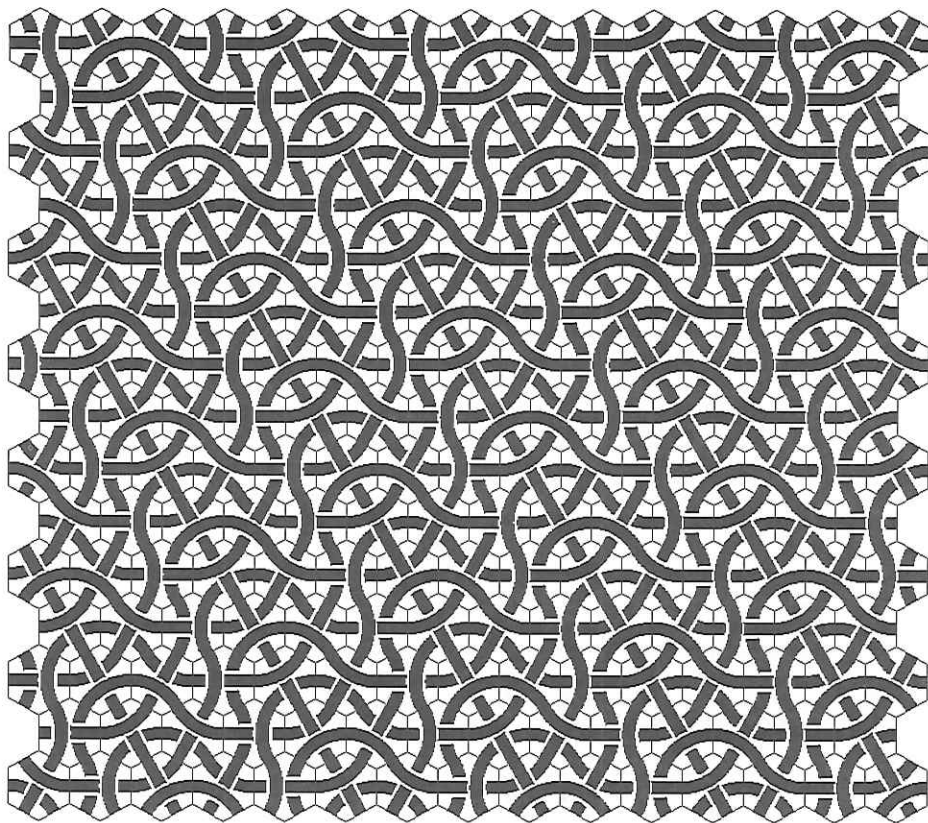
Figura 2.

2.1. Os mosaicos

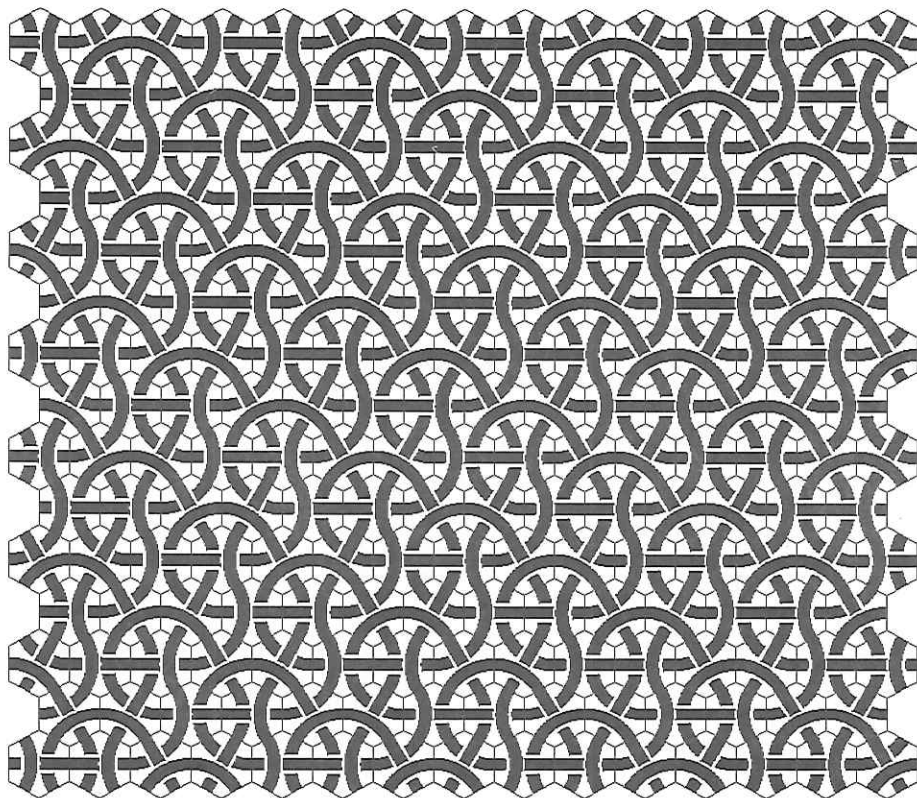
A seguir exibimos mosaicos com suas respectivas seqüências geradoras, visando facilitar a identificação da estratégia de construção de cada um deles.



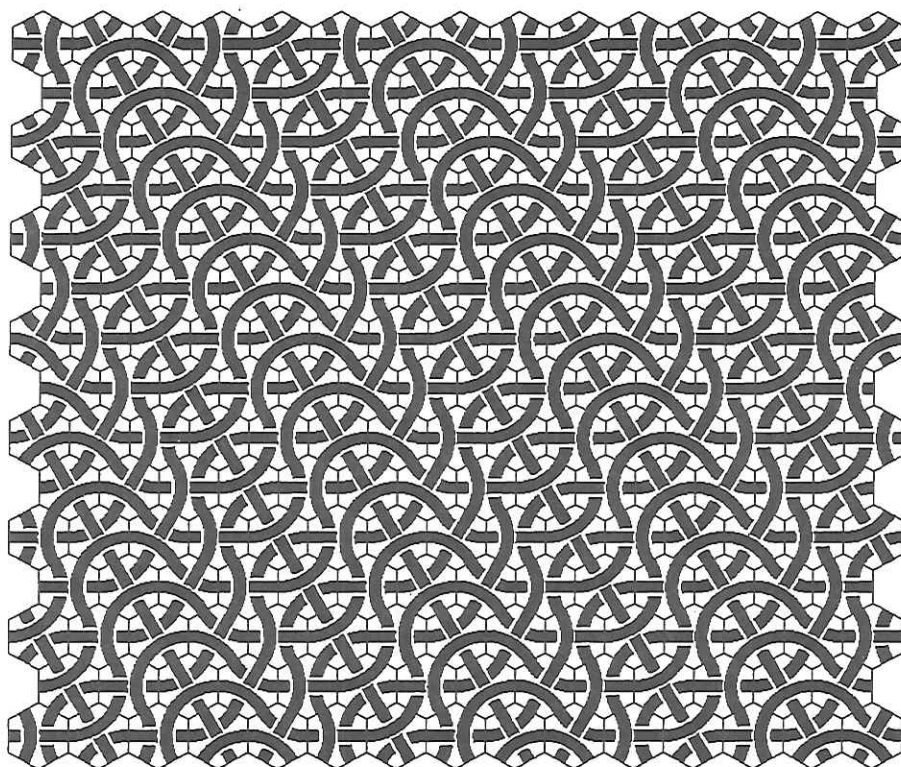
(2, 3, 5, 0, 2, 4, 2, 3, 5, 0, 2, 4, ...).



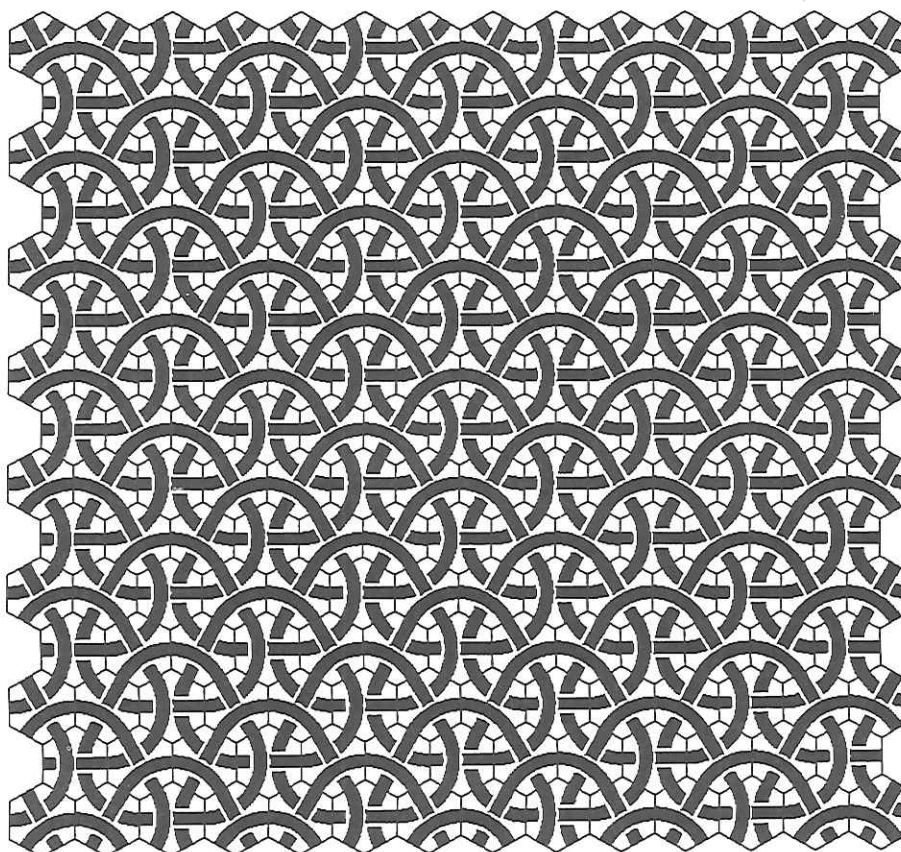
(0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...).



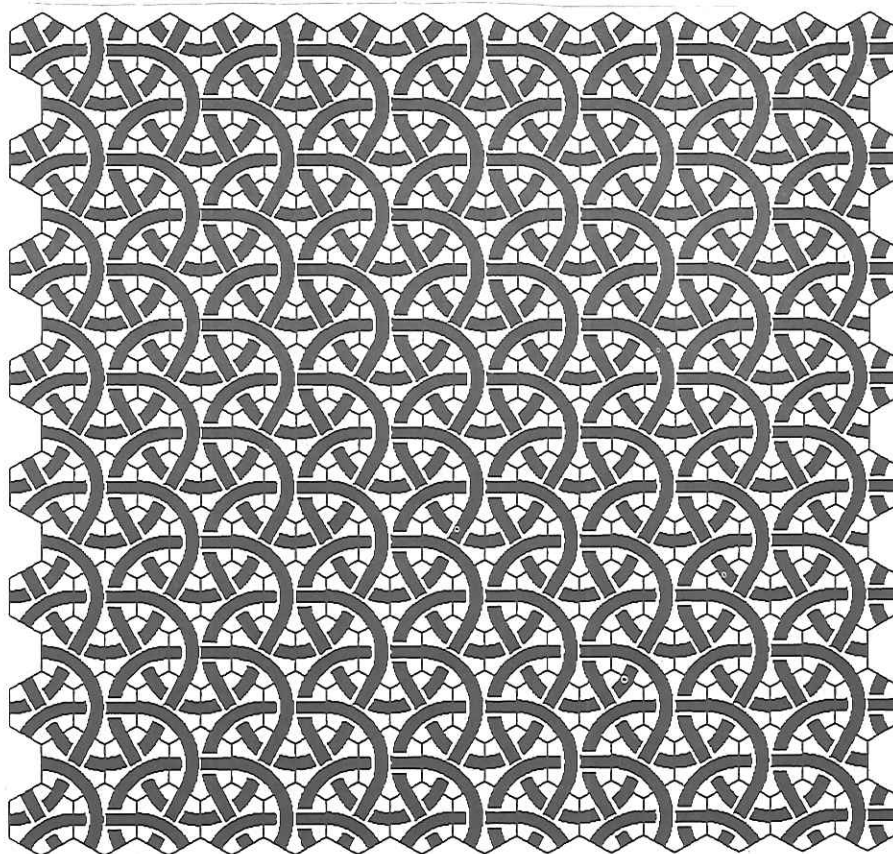
(0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, ...)



(0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, ...)



(1, 2, 3, 1, 2, 3, ...)



(1, 3, 2, 1, 3, 2, ...)

2.2. Os Logo-procedimentos

Os Logo procedimentos a seguir se referem aos mosaicos relativos às seqüências com motivos hexagonais. (Um exemplo de execução: mosaico 30 14 seq [1 2 3] .)

```
ap mosaico :aa :nn
atr "pil [ ]
atr "a :aa
atr "n :nn
atr "ib 1
atr "pi 4*arctanrd 1
atr "x -400+:a
atr "y 400-:a un
atr "r :a/2*raizq 3 mudexy :x :y
dt hex2 :a :n at un mudexy :x :y
fim
```

```
ap arc2d :alfa :raio
repita :alfa [ pf :pi*:raio/180 pd 1 ]
fim
```

```
ap arc2e :alfa :raio
repita :alfa [ pf :pi*:raio/180 pe 1 ]
fim
```

```
ap hex :a
ip "pil pos un pf :a pd 120 ul repita 6 [ pf :a pd 60 ] un pe 120 pt :a
fim
```

```
ap hex2 :a :n
repita int :n/2 [ repita :n [ hex :a pd 120 pf :a pe 60 pf :a pe 60 ] ~
pt :a pd 90 pt :a*:n*raizq 3 pe 150 pt :a pd 60 ~
```

repita :n-1 [hex :a pd 120 pf :a pe 60 pf :a pe 60] ~
 pt :a pd 90 pt :a*:n*raizq 3 pe 150 pt :a pd 60] ~
 repita :n [hex :a pd 120 pf :a pe 60 pf :a pe 60]
 fim

ap mot3
 atr "r3 raizq 3 un pf :a pd 120 pf :a/3 pd 90 atr "pos1 pos atr "dç1 dç ul
 arc2e 61 :a*5/3 un mudapos :pos1 mudedç :dç1 pe 90 pf :a/3 pd 90 ul
 arc2e 61 :a*4/3 un mudapos :pos1 mudedç :dç1 pd 90 pf :a/3 pe 60 pf :a
 pe 60 pf :a*2/3 pe 90 ul pf :a*:r3/2-:a/40 un pf :a*23/40 ul pf :a/50+:a/20*(10*:r3-11) un
 pt :a/50+:a*:r3 ul pd 90 pt :a/3 pe 90 ul pf :a*:r3/2-:a/40 un pf :a*23/40 ul pf :a/20*(10*:r3-11)
 pt :a/20*(10*:r3-11) atr "pos1 pos atr "dç1 dç pd 109 arc2e 41 :a/2 pf :a/50 un
 mudapos :pos1 md :dç1 pt :a*23/40 ul atr "pos1 pos atr "dç1 dç pd 109 arc2e 41 :a/2
 pf :a/50 un mudapos :pos1 md :dç1 pt :a*:r3/2-:a/40 pd 90 pf :a*2/3 pe 60 pf :a/3 atr "pos1 pos
 atr "dç1 dç pe 90 ul arc2e 18 :a*4/3 un arc2e 24 :a*4/3 ul arc2e 19 :a*4/3 un mudapos :pos1
 md :dç1 pf :a/3 atr "pos1 pos atr "dç1 dç pe 90 ul arc2e 20 :a*5/3 atr "dç2 dç md :dç1-30
 pt :a/3+:a/50 pf :a/3+:a/50 md :dç2 un arc2e 20 :a*5/3 ul atr "dç2 dç md :dç1-30 pt :a/3+:a/50
 pf :a/3+:a/50 md :dç2 arc2e 21 :a*5/3 un mudapos :pos1 md :dç1 pf :a/3 pe 120 pf :a
 se :k = 1 [un pd 30 pf :a*2/3 pd 120 repita 6 [pinte pf :a*2/3 pd 60] pe 120 pt :a*2/3 pe 30]
 fim

ap seq :s
 dt atr "pil2 :pil atr "s2 :s
 atéque [:pil2=[]] [mudapos ult :pil2 atr "pil2 su :pil2 se :s2=[]] [atr "s2 :s] ~
 md 60*pri :s2 mot3 atr "s2 sp :s2] at
 fim

ABSTRACT: *This paper aims at constructing the geometrical representation of numerical sequences based on the educational merit of the association between mosaic geometry and LOGO.*

KEYWORDS: *numerical sequences; geometrical mosaics; patterns and symmetries; LOGO.*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] SILVA E. A., SOUZA, D. Representação geométrica de padrões numéricos através do Caleidostróton. In: V EPEN, 1998, S. J. Rio Preto - SP, Resumos 225 - 226, 1998.
- [2] SILVA, E. A., SOUZA, D. Construindo mosaicos ornamentais através do Caleidostróton e do SLogoW. *Rev. Educação Matemática*, ano 5, no. 3, 31- 42, 1997.
- [3] Caleidostróton: mosaicos e ornamentos com motivos quadrados (material educativo). *Lógica – Brinquedos Educativos*. S. J. Rio Preto, SP, 1996.
- [4] IVES, R. Using tiling generators in School. The Association of Teachers of Mathematics, England, 1994.
- [5] HUNTLEY, H. E., A divina proporção. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

¹ Trabalho parcialmente financiado pela Pró-Reitoria de Extensão Universitária e Assuntos Comunitários da UNESP, pela FUNDUNESP e pela FAPESP.

² Colégios Esquema/Universitário, S. J. Rio Preto – SP e Anglo, Novo Horizonte - SP.

³ Departamento de Matemática - Universidade Estadual Paulista - UNESP, R. Cristóvão Colombo, 2265, J. Nazareth, Caixa Postal 136, CEP 15054-000, S. J. Rio Preto - SP (e-mail: euri@mat.ibilce.unesp.br).