SEÇÕES CÔNICAS: HISTÓRIA E ENSINO

HYGINO H. DOMINGUES

I SÍNTESE DA HISTÓRIA DAS CÔNICAS

a) Origens

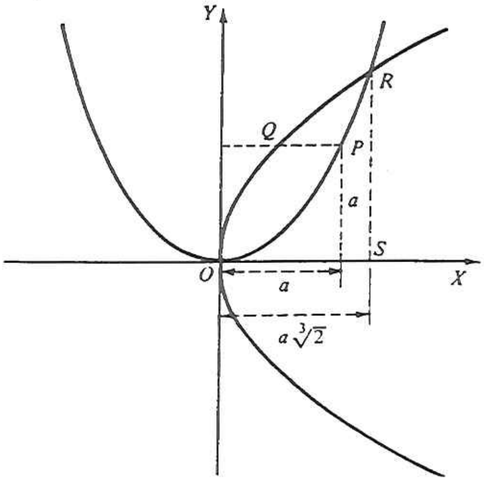
Não há um consenso sobre como nem quando as seções cônicas apareceram na história da matemática. Mas na versão mais difundida, a de Eratóstenes (c. Séc. III aC), a origem estaria na tentativa de Menaecmo (Séc. IV aC) de resolver o problema da duplicação do cubo: ou seja, o problema consistindo em construir um cubo cujo volume seja o dobro do volume de um outro cubo dado, de lado a. Menaecmo era discípulo de Eudoxo mas também foi membro da Academia de Platão (427-347 aC) onde esse problema foi estudado.

Essa hipótese é bastante plausível pois, algum tempo antes, Hipócrates de Quio (Séc. V aC) havia reduzido o problema à inserção de duas médias proporcionais entre a e $2a$, ou seja, à determinação de x em

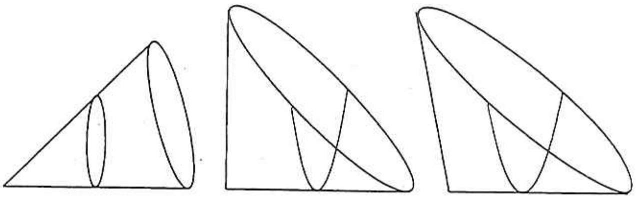
$$a:x = x:y = y:2a, \qquad (1)$$

pois daí segue que $x^2 = ay$ e $y^2 = 2ax$ e portanto, eliminando y, $x^3 = 2a^3$. Donde $x = \left(\sqrt[3]{2}\right)a$, que é a aresta do cubo procurado.

Considerando que essa solução foi obtida como interseção das parábolas de equação $x^2 = ay$ e $y^2 = 2ax$ (figura a seguir), a versão de Eratótenes pode ter procedência (notar que, além das parábolas destacadas, de (1) obtém-se também a equação $xy = 2a^2$ de uma hipérbole).



Obviamente, porém, os sistemas de coordenadas não eram conhecidos no tempo de Menaecmo nem ele os inventou. A hipótese que normalmente se faz é que ele teria obtido as cônicas raciocinando com os três tipos de cone de uma folha, no que se refere ao ângulo da seção meridiana. No caso de o ângulo ser agudo, um plano que corta a superfície do cone perpendicularmente a uma geratriz determina uma elipse; se o ângulo é reto, a seção é uma parábola; e se é um ângulo obtuso, um ramo de hipérbole (figura a seguir).

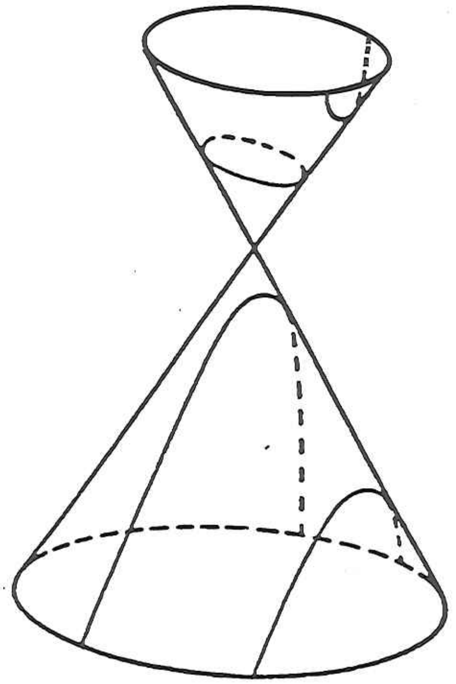


b) Apolônio

A idéia utilizada por Menaecmo para obter as seções cônicas foi retomada e desenvolvida substancialmente por Euclides (c. 300 aC), numa obra intitulada *Cônicas*. Infelizmente, porém, essa obra perdeu-se e apenas indiretamente sabemos alguma coisa sobre ela.

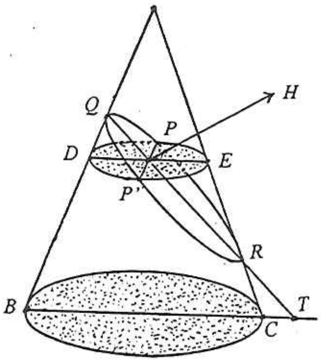
Mas as maiores e mais significativas contribuições legadas pela antigüidade à teoria das seções cônicas se devem a Apolônio de Perga (c. 262-169 aC) e encontram-se em sua magistral obra, *Seções cônicas*, originalmente composta de 8 livros. Desses, os quatro primeiros talvez não passem de uma reconstituição da obra similar de Euclides e existem em manuscritos gregos dos séculos XI e XII. Dos demais, o último se perdeu (mas foi reconstituído por Edmond Halley [1656-1742], com base em pistas colhidas na obra de Papus [c. 300 dC]), e os outros três somente chegaram a nós numa tradução árabe do século IX. Graças a *Seções Cônicas*, uma obra extremamente criativa e abrangente, Apolônio merecidamente ganhou de seus contemporâneos o cognome de *O grande geômetra*.

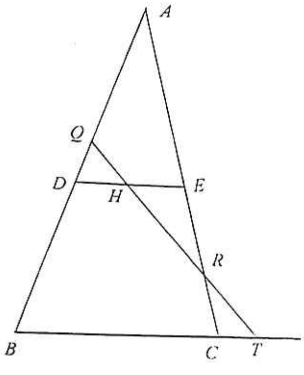
Apolônio foi o primeiro matemático a perceber que os três tipos de cônicas — *elipse, parábola e hipérbole* — podem ser obtidos como seções de uma única superfície cônica, variando convenientemente a inclinação do plano de interseção. E, introduzindo superfícies cônicas de duas folhas, foi capaz de obter os dois ramos das hipérboles (figura que segue).



Apesar de sua abordagem ser inicialmente tridimensional, Apolônio estudou as cônicas como figuras planas. O exemplo que segue mostra bem a engenhosidade da abordagem de Apolônio. Trata-se da demonstração do primeiro teorema sobre a elipse, com o qual Apolônio determina a propriedade métrica característica (*symptome*) dessa curva. As propriedades correspondentes para as duas outras curvas podem ser estabelecidas de maneira análoga e, por brevidade, serão omitidas aqui.

Na figura abaixo, ABC é uma seção meridiana qualquer da superfície cônica considerada e P é um ponto comum a essa superfície e a um plano inclinado que a corta. A interseção é a elipse $QPRP'$ destacada na figura. Pelo ponto P traça-se um plano





paralelo à base BC obtendo-se na superfície cônica a circunferência $DPEP'$. Finalmente, o ponto T indica a interseção dos prolongamentos de QR e BC.

Isso posto, é fácil verificar as seguintes semelhanças de triângulos:

$$\Delta\, QHD \approx \Delta QTB,$$

de onde resulta que $QH/QT = DH/BT$ e portanto

$$DH = (QH.BT)/QT, \qquad (2)$$

$$\Delta\, HER \approx \Delta TCR,$$

do que decorre $HE/TC = HR/RT$, donde

$$HE = (HR.TC)/RT. \qquad (3)$$

Ademais, no círculo $DPEP'$ vale a bem conhecida relação:

$$PH^2 = DH.HE. \qquad (4)$$

Substituindo (2) e (3) em (4), obtém-se a relação:

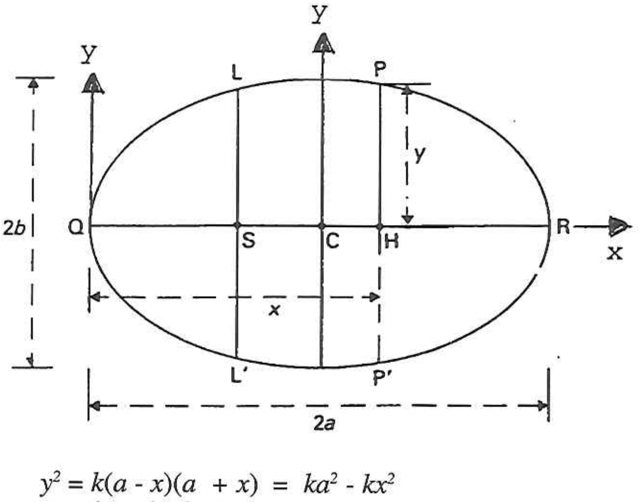
$$PH^2 = \frac{BT.TC}{QT.RT}.QH.HR\ .$$

Façamos $\dfrac{BT.TC}{QT.RT} = k$ (pode-se mostrar que, com as suposições feitas, $k \neq 1$). Então,

$$PH^2 = k.QH.HR \text{ (\textit{symptome} da elipse)} \qquad (5)$$

onde, obviamente, as medida envolvidas na expressão de k independem da posição do ponto genérico P da elipse.

Para interpretar analiticamente a relação (5) introduzamos um sistema de coordenadas cartesianas no plano da seção $QPRP'$, com a origem no ponto médio C de QR, como mostra a figura que segue. Fazendo $QR = 2a$ e indicando por (x,y) as coordenadas de P, a relação (5) se transforma em



$$y^2 = k(a - x)(a + x) = ka^2 - kx^2$$

que é equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{ka^2} = 1 \qquad (6)$$

que é a equação de uma elipse de semi-eixos a e $\sqrt{k}a$.

Transladando os eixos coordenados de maneira a colocar a origem em Q, essa equação se transforma em

$$y^2 = kx(2a - x) = 2kax - kx^2, \qquad (7)$$

forma que será mais conveniente para a questão a ser tratada no próximo item.

Diga-se de passagem que não há nenhuma referência à propriedade foco-diretriz das cônicas (ver II-c) na obra de Apolônio, muito embora, de acordo com Papus (c. 300), Euclides já conhecesse essa propriedade. Assim, a mais antiga formulação conhecida dessa propriedade encontra-se em *Coleção Matemática*, obra do próprio Papus. Tampouco aparece na obra de Apolônio o conceito numérico de excentricidade de uma cônica. Ademais, os gregos antigos não tinha um termo para designar o foco de uma cônica. O termo atualmente usado só foi introduzido no século XVII por Kepler (1571-1630).

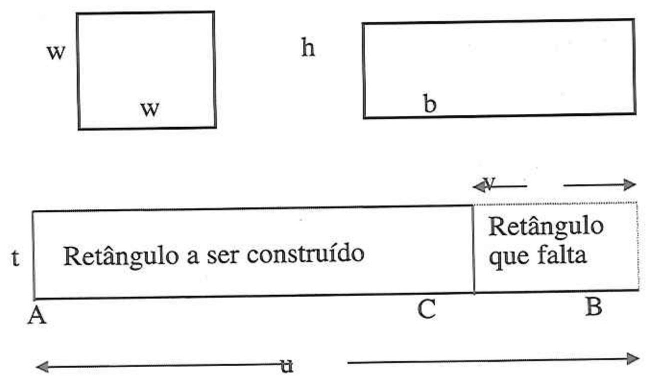
c) Os termos "elipse", "hipérbole" e "parábola"

Um dos problemas cujo estudo e solução se atribui aos pitagóricos é o da *aplicação de áreas*. Três são as formas desse problema: "por falta", "simples" ou "por excesso". Vejamos em que consiste o problema no caso "por falta", mas numa versão que se ajusta aos nossos propósitos.

> *São dados: um segmento* AB *de comprimento* u, *um quadrado de lado* w *e um retângulo de lados* b *e* h. *Construir um retângulo de altura* t *cuja base esteja sobre* AB, *a partir de* A, *mas tenha medida menor que* u, *de modo que sua área seja a mesma da do quadrado dado e que o retângulo que "falta" para preencher* AB (*ver figura*) *seja semelhante ao retângulo dado.*

Seja AC a base do triângulo que se quer construir e indiquemos por v a medida de CB. Devemos ter então

$$ut - vt = w^2 . \qquad (8)$$



Mas, impondo a condição de semelhança dos retângulos:

$$\frac{b}{h} = \frac{v}{t}$$

de onde segue que: $v = \dfrac{bt}{h}$. (9)

De (8) e (9) resulta que

$$w^2 = ut - \frac{b}{h}t^2 \qquad (10)$$

Vale notar que para que essa forma de aplicação de áreas tenha solução deve-se ter $ut - \dfrac{b}{h}t^2 > 0$. Portanto

$$0 < t < \frac{hu}{b} .$$

Por razões óbvias, os pitagóricos acabaram elegendo a palavra *elleipsis* ("falta"), para indicar o problema de aplicação de áreas por falta. E a palavra *hyperbolē* ("excesso") para designar a aplicação de áreas por excesso (a diferença deste caso para com o anterior é que o ponto C deve cair no prolongamento de AB e portanto o retângulo a ser construído tem um "excesso" em relação àquele sobre AB). No caso de aplicação *simples* (em grego *parabolē*) são dados o segmento AB e o quadrado de área w^2 apenas. Pretende-se então construir um retângulo de base u (medida de AB) e altura t, de maneira que a área desse retângulo seja igual à do quadrado. Isto é, $w^2 = ut$.

Isso posto, torna-se evidente a razão pela qual Apolônio escolheu o termo "elipse" para designar a curva cuja equação pode ser colocada na forma (7). De fato, a própria equação nos mostra que os pontos dessa curva estão associados ao problema de aplicação de áreas *por falta* ("elleipsis") sobre um segmento AB de medida $2ka$ e como se dá essa associação. Para cada ponto (x,y) da elipse, excluídos os vértices, trata-se de aplicar sobre o segmento AB o retângulo de altura x e de área y^2, de maneira que o retângulo que "falta" seja semelhante ao retângulo de base k e altura 1, tendo portanto base kx e área kx^2. Note-se que como, para as abscissas dos pontos considerados, vale a relação $0 < x < 2a$, então a base do retângulo aplicado mede $2ka - kx > 0$, o que significa que a equação (7) traduz efetivamente uma aplicação de áreas por falta, para cada ponto da elipse, exceto os vértices.

Uma argumentação análoga à anterior explica os nomes *parábola e hipérbole* adotados por Apolônio para designar as outras duas seções cônicas.

II O ENSINO DAS CÔNICAS

a) Introdução

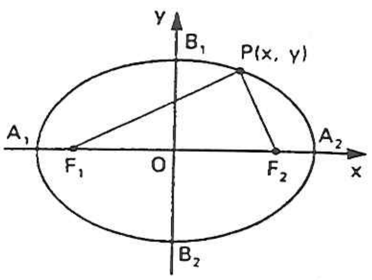
As definições de elipse, hipérbole e parábola usualmente dadas num primeiro curso de geometria analítica podem suscitar dúvidas nos alunos mais atentos no que se refere à terminologia, uma vez que essas três curvas são tratadas conjuntamente como *seções cônicas* ou *cônicas* apenas e, à primeira vista, o aluno pode não perceber o que as três curvas têm em comum para merecerem a mesma designação. Evidentemente não é possível esclarecer totalmente essa questão em nível de segundo grau e nem mesmo, em geral, no ciclo básico de um curso superior da área de ciências exatas. Mas, em nossa opinião, isso não significa que os professores desses níveis não devam estar bem inteirados a respeito da matéria, até pelo contrário. Assim, o objetivo do que segue é fornecer elementos que possam ajudar os professores a ter uma visão mais ampla das raízes geométricas comuns às seções cônicas.

Como ponto de partida consideraremos as definições das três cônicas dadas por Iezzi (p. 168-179)—diga-se de passagem bem formuladas tendo em vista os objetivos da obra:

> **Elipse:** Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano α, seja $2c$ a distância entre eles. Elipse é o conjunto dos pontos de α cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ (sendo $2a > 2c$).
>
> **Parábola:** Dados um ponto F e uma reta d, pertencentes a um plano α, com $F \notin d$, seja p a distância entre F e d. Parábola é o conjunto dos pontos de α que estão à mesma distância de F e d.
>
> **Hipérbole:** Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano α, seja $2c$ a distância entre eles. Hipérbole é o conjunto dos pontos de α cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ (sendo $0 < 2a < 2c$).

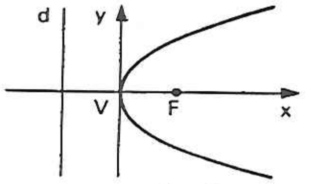
Seguem as equações reduzidas e os gráficos obtidos a partir dessas definições.

Elipse



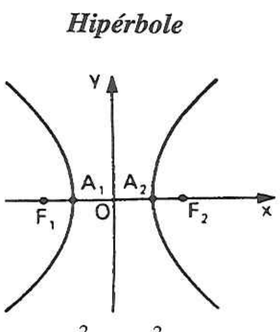
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Parábola



$y2 = 2px$

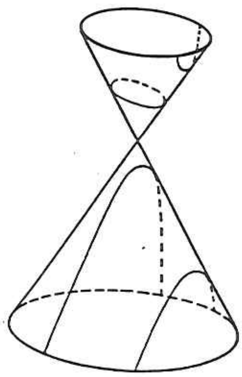
Hipérbole



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Pelo que se vê, tanto a partir das equações como a partir dos gráficos não é uma tarefa fácil para o aluno perceber as ligações entre esses lugares geométricos.

Certamente muitos professores não se atêm às definições analíticas e aos gráficos e mostram aos alunos como as três curvas poderiam ser obtidas fazendo com que um plano variável corte convenientemente uma superfície cônica de duas folhas. Mas, embora louvável, esse expediente ao nosso ver não basta para dirimir por completo a dúvida apontada. Duas questões podem ainda ficar no ar: (a) O que garante que as curvas obtidas através das interseções descritas são exatamente aquelas curvas definidas analiticamente em termos de certas distâncias? (b) Se são, como poderíamos defini-las conjuntamente por métodos geométricos ou analíticos?



A primeira questão já foi abordada, embora parcialmente, na primeira parte do artigo, no caso da elipse. Daremos a seguir uma resposta à segunda pergunta.

b) Forma trinômia comum às três cônicas

Mostraremos nesta seção que as equações das três cônicas (conforme definição transcrita) admitem a seguinte forma trinômia comum:

$$y^2 = 2px + qx^2, \qquad (11)$$

em que $p > 0$ e q é diferente de -1. Conforme q seja menor que, igual a ou maior que zero trata-se respectivamente de elipse, parábola ou hipérbole. Isso se consegue com uma simples translação de eixos.

Elipse: A equação reduzida da elipse (mantidas as notações das definições transcritas na parte a) desta seção) é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (12)$$

Note-se primeiro que devido à relação $a^2 = b^2 + c^2$ (estamos pressupondo que $(c,0)$ é o foco da elipse situado no semi-eixo positivo) não se pode ter $a = b$, visto que $c > 0$. Transladando os eixos coordenados de maneira a colocar a nova origem no ponto $O' = (-a, 0)$, então o novo sistema de coordenadas, $XO'Y$, relaciona-se com o original através das equações: $X = x + a$ e $Y = y$. Daí: $x = X - a$ e $y = Y$. No novo sistema a equação da elipse será então:

$$\frac{(X-a)^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1.$$

Daí: $$Y^2=b^2-b^2\,\frac{X^2-2aX+a^2}{a^2}$$ e portanto

$$Y^2=\frac{2b^2}{a}X-\frac{b^2}{a^2}X^2\ , \qquad (12')$$

onde, obviamente, o coeficiente de X *é* positivo e o de X^2 negativo. Este último, aliás, é diferente de -1 já que $a \neq b$.

Parábola: A equação reduzida da parábola, $y^2 = 2px$, em que p é a distância do foco à diretriz, já é a forma trinômia desejada, uma vez que, obviamente, $p > 0$.

Hipérbole: A equação reduzida da hipérbole é:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (13)$$

Diga-se de passagem que neste caso a pode ser igual a b — tem-se então uma hipérbole equilátera. Fazendo-se a translação que leva a origem inicial para o ponto $(a,0)$ e feitas as simplificações necessárias, chega-se a

$$Y^2=\frac{2b^2}{a}X+\frac{b^2}{a^2}X^2, \qquad (13')$$

onde, evidentemente, os coeficientes de X e X^2 são positivos e este último diferente de -1.

Reciprocamente, consideremos uma curva cuja equação, relativamente a um dado sistema de coordenadas retangulares, tenha a forma (11), com $p > 0$ e $q \neq -1$. Se $q = 0$, obviamente trata-se da parábola de foco no ponto $(p/2,0)$ e diretriz $x = -p/2$.

Suponhamos, agora, $q \neq 0$ e efetuemos a translação de eixos coordenados que leva a origem para o ponto $O' = (-p/q,0)$. Indicando o novo sistema de coordenadas por $XO'Y$, a equação (1) se transforma em

$$Y^2=2p\left(X-\frac{p}{q}\right)+q\left(X-\frac{p}{q}\right)^2.$$

Feitos os cálculos algébricos indicados e as simplificações convenientes, chega-se a

$$Y^2=-\frac{p^2}{q}+qX^2.$$

Passando o termo qX^2 para o primeiro membro e dividindo a igualdade resultante por $-\dfrac{p^2}{q}$, obtém-se

$$\frac{X^2}{\left(\dfrac{p^2}{q^2}\right)}-\frac{Y^2}{\left(\dfrac{p^2}{q}\right)}=1.$$

Evidentemente essa equação representa uma elipse se $q < 0$ e uma hipérbole se $q > 0$.

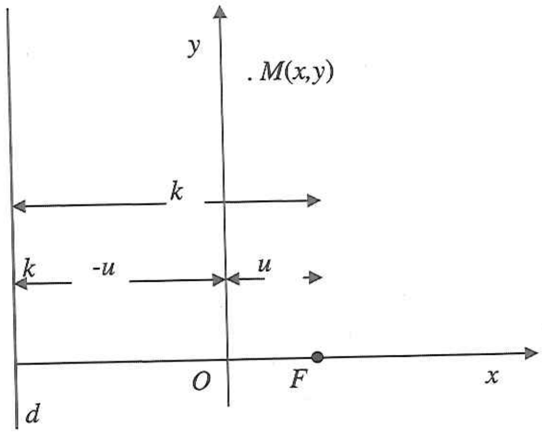
c) A propriedade (unificadora) foco-diretriz

O teorema que demonstraremos a seguir nos permitirá ver a elipse, a parábola e a hipérbole como casos particulares de um mesmo tipo de lugar geométrico.

Teorema: *Uma curva plana é uma elipse (parábola, hipérbole) se, e somente se, no plano em que está contida se puder encontrar uma reta* ***d*** *e um ponto* ***F*** *(**F** $\notin$ **d**), de maneira que a razão entre as distâncias de um ponto genérico da curva a* ***F*** *e a* ***d*** *seja uma constante* ***e****, com* $0 < e < 1$ *(respectivamente,* $e = 1$ *e* $e > 1$*).*

Consideremos uma curva plana para a qual se possam encontrar d e F nas condições do enunciado. Consideremos então um sistema de coordenadas cartesianas em que o eixo das abscissas seja a perpendicular a d por F, com F no semi-eixo positivo, e a origem seja o ponto dessa perpendicular cuja razão das distâncias a F e d seja a constante e. Assim, se k é a distância de F a d, o ponto F e a equação de d são dados respectivamente por

$$\left(\frac{ke}{1+e},0\right) \quad \text{e} \quad x=-\frac{k}{1+e}.$$



De fato, com as notações da figura temos $F = (u,0)$. Mas, devido à escolha de O,

$$\frac{u}{k-u}=e.$$

Disso decorre que $u = ke - ue$ e portanto $u\,(1+e) = ke$. Donde

$$u=\frac{ke}{1+e}.$$

Por outro lado, a equação da reta d é obviamente

$$x=-(k-u)=u-k=\frac{ke}{1+e}-k=\frac{-k}{1+e}.$$

Indiquemos por $M = (x,y)$ um ponto genérico do lugar geométrico em estudo. Então

$$\frac{\left(x-\dfrac{ke}{1+e}\right)^2+y^2}{\left(x+\dfrac{k}{1+e}\right)^2}=e^2.$$

Dessa igualdade decorre que

$$y^2 = 2kex + (e^2 - 1)x^2, \qquad (14)$$

equação simplificada do lugar geométrico. Como k e e são positivos, $2ke > 0$. Também não se pode ter $e^2 - 1 = -1$ pois isso acarretaria $e = 0$. Assim, de acordo com o resultado do item anterior, o lugar geométrico é uma elipse se $0 < e < 1$, uma parábola, se $e = 1$ e uma hipérbole se $e > 1$.

Reciprocamente, consideremos agora uma cônica. Se se tratar de uma parábola, a própria definição usual já garante a existência da reta d e do ponto F, conforme o exigido pelo enunciado. Consideremos agora a elipse de equação (12) e façamos a seguinte experiência: verificar se o foco $(-c,0)$ dessa elipse pode desempenhar o papel do ponto F do enunciado. Lembremos que a distância de um ponto genérico (x,y) da elipse a esse foco é dada por

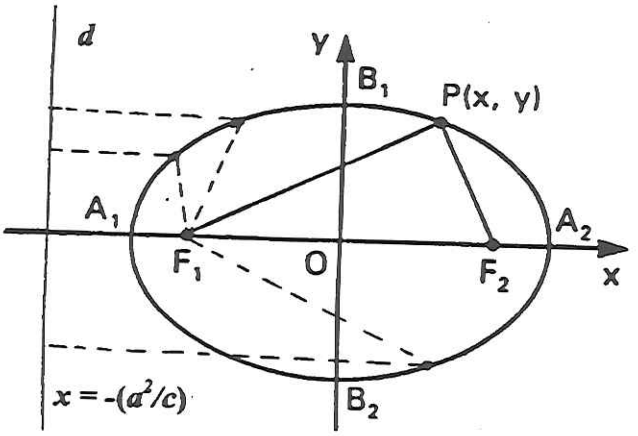
$$a + (c/a)x.$$

Verifiquemos também se é possível encontrar uma reta perpendicular ao eixo x que faça as vezes da reta d do enunciado. Se a equação dessa reta é $x = u$, é conveniente impor que $u < -a$ pois nesse caso a distância do ponto genérico (x,y) da elipse à reta d é dada por $-u + x$. Indicando por e a razão entre as distâncias de (x,y) ao ponto $(-c,0)$ e a d temos

$$\frac{a+(c/a)x}{-u+x} = e.$$

Uma solução para essa equação é, evidentemente, $e = c/a$ e, portanto, $u = -(a^2/c)$. Logo, o ponto $F = (-c,0)$ e a reta d de equação $x = -(a^2/c)$ atendem ao exigido na tese. Pode-se mostrar que outra opção seria formada pelo ponto $F' = (c,0)$ e pela reta d' de equação $x = a^2/c$. Pode-se demonstrar, ademais, que os únicos pares (ponto, reta) dentro do exigido são (F, d) e (F', d').

Coisa análoga acontece com a hipérbole, *mutatis mutandis*. A figura a seguir mostra um par foco-diretriz da elipse.



Definição: *Uma reta* ***d*** *e um ponto* ***F****, dentro das condições do enunciado do teorema, enominam-se respectivamente* ***diretriz*** *e* ***foco*** *da cônica que determinam. A razão entre as distâncias de um ponto da cônica ao ponto* ***F*** *e à reta* ***d*** *denomina-se* ***excentricidade*** *da cônica. No caso das parábolas a excentricidade é igual a 1; no caso da elipse e da hipérbole a excentricidade é dada por* ***c/a****.*

Resulta então que a excentricidade de uma cônica é sempre um número maior que zero e que é menor que 1, igual a 1 ou maior que 1, conforme se trate de uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole.

Obs.: Do teorema decorre que existe sempre um sistema de coordenadas retangulares em relação ao qual a equação de uma cônica tem a forma (14). Essa equação mostra que a cônica é simétrica em relação ao eixo das abscissas, onde se localiza o foco $F = \left(\frac{ke}{1+e}, 0\right)$. Isso posto, consideremos a reta perpendicular a esse eixo por F e determinemos seus pontos de interseção com a cônica. Para tanto temos de resolver o sistema formado pelas equações

$$y^2 = 2kex + (e^2 - 1) \text{ e } x = \frac{ke}{1+e}.$$

A resolução, aqui omitida, fornece os seguinte pontos:

$$\left(\frac{ke}{1+e}, ke\right) \text{ e } \left(\frac{ke}{1+e}, -ke\right).$$

O segmento cujas extremidades são esses pontos é uma corda da cônica, perpendicular ao eixo pelo foco considerado. A medida da corda, que obviamente é $2ke$, chama-se *latus rectum* ou *parâmetro* da cônica. Note-se que o *latus rectum* de uma cônica é exatamente a medida do segmento sobre o qual se deve fazer a aplicação da área y^2 com vistas a interpretar o nome dado à curva a partir da forma trinômia comum e da terminologia pitagórica (ver I-c).

Hygino H. Domingues
Professor e Coordenador do Curso de Matemática UNIRP
Professor Adjunto aposentado da UNESP

BIBLIOGRAFIA

Boyer, C.B., *História da matemática*, 2a Edição. Editora Edgard Blücher Ltda., S. Paulo, 1996.

Bunt, L.N.H., et al, *The historical roots of elementary mathematics*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1976.

Eves, H., *Introdução à história da matemática*. Editora da UNICAMP, Campinas, 1994.

Iezzi, G., *Fundamentos de matemática elementar, 7, geometria analítica*. Atual Editora, S.Paulo, 1993.

Katz, V. J., *A history of mathematics, an introduction*. Harper Collins College Publishers, Nova York, 1993.

Kline, M., *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press, Nova York, Oxford, 1972.

Pastor, J. R. e Babini, J., *Historia de la matematica*, Espasa-Calpe Argentina, Buenos Aires, 1951.

Pastor, J.R. et al, *Geometria Analítica*, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 1958.