

EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU: UMA RESOLUÇÃO MUITO ANTIGA

MARCOS LUIZ LOURENÇO *

1 INTRODUÇÃO:

Neste artigo vamos discutir um processo de resolução de equações do primeiro grau com base em informações obtidas junto à História da Matemática. Os dados históricos e a forma sugerida referem-se às orientações contidas nos papiros de Moscou (1850 a. C.) e de Rhind (1650 a. C.), hoje conhecidas como **regra da falsa posição**. As fontes históricas são escassas e, geralmente, não vão além de alguns exemplos. Embora raros, os exemplos e os comentários encontrados nos textos históricos, podem se constituir em um importante ponto de partida para a elaboração de uma sequência de atividades que facilitem a aprendizagem da resolução das equações de primeiro grau. Além da apresentação da regra da falsa posição feita através da apresentação de exemplos, faremos uma resolução genérica destacando o princípio empregado no método. Finalmente, após uma justificativa geométrica, apresentaremos uma proposta de ensino, utilizando a regra da falsa posição como forma didática, para alunos de sextas séries.

2 PROBLEMAS ANTIGOS

Um dos problemas encontrados nos textos de história da Matemática pode ser formalizado da seguinte forma: Determine o peso de uma pedra sabendo-se que *ela* mais um sétimo dela mesma mais um onze avos somada com seu peso mais um sétimo dele mesmo é uma mina.

Com a simbologia atual este problema pode ser representado pela expressão

$$\left(x + \frac{x}{7}\right) + \left(\frac{1}{11}\right) + \left(x + \frac{x}{7}\right) = 1$$

Outro problema, encontrado num texto da Babilônia antiga, nos conduz a duas equações lineares simultâneas, com duas incógnitas chamadas, respectivamente, de “primeiro anel de prata” e “segundo anel de prata”.

Representando as duas variáveis, respectivamente, por x e y , as equações podem ser escritas como

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{11} = 1 \text{ e } \frac{6x}{7} = \frac{10y}{11}. \text{ Neste caso o texto}$$

* Professor da UNIRP e Professor Assistente Doutor aposentado do IBILCE/UNESP

apresenta a resposta como:

$$\frac{x}{7} = \frac{11}{7+11} + \frac{1}{72} \text{ e } \frac{y}{11} = \frac{7}{7+11} - \frac{1}{72}.$$

O método utilizado para a resolução das equações é parcialmente descrito e sugere a substituição de cada “*mão*” por 5 “*dedos*” e observa que uma largura de 20 e um comprimento de 30 dedos satisfazem a ambas as equações. A solução é determinada utilizando um método equivalente ao hoje conhecido como substituição de variáveis (por meio de combinação de equações, expressam todas as variáveis em termos de mãos). Com nossa simbologia, fazendo comprimento e largura respectivamente iguais a x e a y o problema pode ser equacionado pelas expressões $y + 4x = 28$ e $x + y = 10$. Subtraindo a segunda da primeira tem-se o resultado $3x = 18$; de onde vem $x = 6$ mãos ou 30 dedos e $y = 20$ dedos.

Os papiros de Rhind e de Moscou apresentam 110 problemas, muitos dos quais deixam transparecer suas origens práticas ao lidarem com questões tais como “*quão substanciosos eram o pão e a cerveja*”, sobre *balanceamento de rações para gado e aves domésticas* e sobre *armazenamento de grãos*.

4

DESCRIÇÃO DO MÉTODO

Os exemplos descritos nos livros de história da matemática permitem resumir o método utilizado em duas etapas. Na primeira delas procura-se atribuir à incógnita um valor que elimine o denominador das frações existentes (atribui-se a x o valor igual ao denominador da fração). A segunda etapa consiste em utilizar uma "regra de três" com o valor (falso) atribuído a x correspondendo ao valor (falso) do resultado encontrado e o valor esperado (valor real) de x correspondendo ao valor dado pela equação. Os exemplos resolvidos a seguir facilitam o entendimento do processo.

Exemplo 1: Qual o valor de "aha" sabendo que "aha" mais $1/7$ de "aha" é igual a 19.²

Utilizando a notação atual podemos traduzir o problema acima com a equação:

$$x + \frac{x}{7} = 19$$

supondo $x=7$ obtem-se:

$$x + \frac{x}{7} = 7 + \frac{7}{7} = 8$$

Utilizando uma "regra de três simples" podemos encontrar o valor real de x

$$\begin{array}{r|l} 7 & 8 \\ \hline x & 19 \end{array}$$

de onde vem $x = 7.19/8 = 133/8$

Exemplo 2: Determinar o valor de x na expressão:

$$x + \frac{1}{4}x = 15$$

Solução:

Supondo $x = 4$ teremos

$$x + \frac{1}{4}x = 4 + \frac{1}{4}.4 = 4 + 1 = 5$$

Utilizando o princípio da "regra de três" teremos:

$$\begin{array}{r|l} 4 & 5 \\ \hline x & 15 \end{array}$$

de onde vem

$$\frac{x}{4} = \frac{15}{5} \Rightarrow x = \frac{4.15}{5} = 12$$

² O termo "aha" significa monte e é utilizado para designar a variável.

OBSERVAÇÃO - Determinar o valor de x real utilizando a regra de três é o mesmo que multiplicar o valor inicialmente atribuído a x pelo quociente entre o valor desejado e o valor encontrado. No primeiro exemplo temos $x = 7. (19/8)$ e no segundo temos $x = 4. (15/5)$.

5

CASO GERAL

A descrição do método da falsa posição e a resolução de alguns exercícios, em geral, são suficientes para que se tenha uma credibilidade no método de resolução apresentado, entretanto, mais por curiosidade do que por necessidade vamos resolver o "caso geral" e comparar a regra da falsa posição com a técnica que empregamos hoje na resolução de equações do primeiro grau.

</

6

RESUMO DO MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

6.1 Atribui-se um valor qualquer para a variável (x).

6.2 Determina-se o valor numérico da expressão, com o valor suposto para x .

6.3 Verifica-se se o resultado obtido é o número desejado.

6.4 Se o resultado obtido for diferente do resultado desejado, determina-se o valor real de x , utilizando-se uma regra de três simples.

O método (e seu resumo) ficam mais claros através de um exemplo.

Seja a equação $x + x/3 = 32$

Sua resolução pelo método da falsa posição:

$$x + \frac{1}{3}x = 32$$

$$\text{se } x = 3$$

teremos:

$$x + \frac{1}{3}x = 3 + \frac{1}{3}3 = 3 + 1 = 4$$

como $4 \neq 32$ ficamos com:

$$x = 3 \cdot \frac{32}{4} = 3 \cdot 8 = 24$$

7

COMPLEMENTO

7.1 Porque funciona

As equações resolvidas pelos antigos gregos e babilônios eram, principalmente do tipo $a.x = b$,

com a e b naturais, ($x + \frac{x}{7} = 24$ pode ser escrita

como $(1 + 1/7)x = 24$). Trata-se pois de uma função linear, com representação genérica do tipo $y = a.x$. Seu gráfico, como sabemos, é uma reta, que pode, genericamente ser representado como na figura 1.

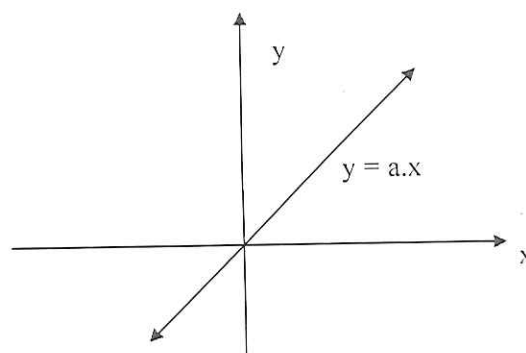


figura 1

Resolver uma equação do tipo $a.x = b$, é determinar o valor de x para o qual y é igual a b (pode-se fazer a pergunta: para qual valor de x temos y igual a b ?). A resolução pelo valor falso pode ser interpretada graficamente e, consiste em, atribuindo-se à x um valor qualquer m , vamos determinar, para y o valor correspondente n , tal que o par (m, n) pertence ao gráfico da função.

No caso da equação inicial se apresentar na forma $a.x + b = c$ (correspondente a $y = ax + c$) a adaptação do gráfico é muito simples e o resultado final não se altera.

A justificativa aqui apresentada nos é muito familiar, principalmente quando trabalhamos com geometria analítica plana. O procedimento utilizado neste estudo talvez nos permita efetuar a seguinte indagação: *a regra da falsa posição não seria, historicamente, um germe gerador da função linear com sua respectiva representação no plano cartesiano?*

7.2 Resolvendo problemas

A regra da falsa posição pode ser empregada na resolução de inúmeros problemas. Vejamos alguns exemplos.

1 - Qual é o número cuja terça parte somada com sua quarta parte resulta 56?

Resolução.

Supondo que o número procurado seja 12, teremos:

$1/3$ de 12 é 4

$1/4$ de 12 é 3

A soma da terça parte com a quarta parte seria $3 + 4 = 7$

Neste caso podemos escrever:

De onde vem $x = 56.12/7$, ou seja $x = 96$

2 - Qual é o número que quando dividido por 5 e por 7 resulta quocientes cuja diferença é 26?

Resolução.

Suponhamos que o número desejado seja 35. Neste caso teríamos $35:5 = 7$ e $35:7 = 5$

Neste caso a diferença entre os quocientes seria $7 - 5 = 2$

Neste caso podemos escrever:

$x/26 = 35/2$ de onde vem $x = 26.35/2$, ou seja $x = 455$

3. Determine dois números cuja soma seja 41 e cuja diferença é 13.

Resolução

Suponhamos 5 o menor dos números. Neste caso o maior é $5 + 13 = 18$.

Neste caso a soma dos dois números seria 23.

O raciocínio que empregamos até aqui não pode ser empregado neste problema pois, em todas as questões anteriores dispunhamos de proporcionalidade simples entre o número desejado e o número suposto verdadeiro (tomando-se para x um valor m vezes o valor inicial o resultado não se torna m vezes o resultado obtido inicialmente – no caso, supondo $x = 10$ (o dobro de 5) obteremos para a soma o valor 33 e não 46 (o dobro de 23).

Neste caso devemos procurar um pouco mais.

Supondo que o número menor seja 6 teremos: o maior será 19 e a soma dos sois será 25

Supondo que o número menor seja 7 teremos: o maior será 20 e a soma dos sois será 27

Supondo que o número menor seja 8 teremos: o maior será 21 e a soma dos sois será 29

Supondo que o número menor seja 9 teremos: o maior será 22 e a soma dos sois será 31

EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU UMA RESOLUÇÃO MUITO ANTIGA

Alguns textos³ de história da Matemática sugerem que os antigos gregos e babilônios já resolviam equações lineares. O método utilizado por eles tornou-se conhecido como a “*regra da falsa posição*” e sua descrição, em geral, restringe-se à resolução de um exemplo acompanhado de instruções que indicam o que se deve fazer. Em termos atuais, com o uso de nossa simbologia a regra da “falsa posição” pode ser descrita da seguinte forma:

Seja resolver a equação: $x + \frac{x}{5} = 24$

Suponhamos⁴ $x = 5$, neste caso temos

$$x + \frac{x}{5} = 5 + \frac{5}{5} = 5 + 1 = 6$$

Como o resultado deve ser 24 e não 6, devemos multiplicar 5 por⁵ 4
portanto o valor real de x é $5 \cdot 4 = 20$

Vejamos mais dois exemplos.

1. $x + \frac{x}{7} = 48$

suponhamos $x = 7$

teremos $x + \frac{x}{7} = 7 + 1 = 8$

como $6 \cdot 8 = 48$, podemos concluir que $x = 6 \cdot 7 = 42$

2. $x + x/3 + 2x/3 = 24$

Suponhamos $x = 3$, teremos

$$x + x/3 + 2x/3 = 3 + 1 + 2 = 6$$

como $6 \cdot 4 = 24$

Assim teremos:

$$x = 12$$

A regra da falsa posição pode ser explorada um pouco mais, mesmo que deixemos de lado os exemplos dos textos históricos. Vamos supor que desejemos resolver a equação

$$x/3 + x/4 = 42$$

Um valor “conveniente” para x é 12. Neste caso teremos:

$$x/3 + x/4 = 12/3 + 12/4 = 4 + 3 = 7$$

ou seja, o valor real de x é $12 \cdot 6 = 72$

Para desenvolver a confiança ou a credibilidade no método, resolva os exercícios abaixo, utilizando o princípio da “falsa posição”

1. $2x/3 + x = 50$

2. $x + x/3 + 2x/3 = 36$

3. $x - x/10 = 18$

$$\begin{aligned}
 x + x/3 &= 32 \\
 x(1 + 3/4) &= 32 \\
 4x/3 &= 32 \\
 x &= 32/(4/3) \\
 x &= 32 \cdot 3/4 \\
 x &= 24
 \end{aligned}$$

Comparando as duas soluções parece evidente a existência de uma equivalência entre os dois processos, o que sugere que o método da falsa posição e o modelo atual, para resolução de equações lineares traduzem o mesmo pensamento matemático, embora entre as duas existam 4.000 anos de evolução.

8

Conclusão

Com os estudos desenvolvidos podemos concluir que, embora os antigos egípcios e babilônios não conhecessem a representação algébrica para a resolução das equações do primeiro grau, o princípio da falsa posição indica que, em termos de raciocínio eles se equiparavam ao utilizado nos dias atuais (para resolução de equações do primeiro grau), pois, os passos descritos nada mais são do que a sequência que hoje utilizamos aplicando os conceitos e propriedades estruturais modernas.

BIBLIOGRAFIA

BAUMGOST J. K. - Tópicos de Histórias da Matemática para uso em sala de aula - Álgebra, Atual Editora, São Paulo, 1992

BOYER, C. B. - História da Matemática, Editora Edgard Blücher Ltada, São Paulo, 1974

EVES, H. - Introdução à História da Matemática, Editora UNICAMP, São Paulo 1995

KALSON P., A Magia dos Números, Editora Globo, São Paulo, 1961