OBA!!!

APRENDENDO CONSTRUIR NOVOS MOSAICOS, AGORA EM CALEIDOSCÓPIOS COM QUATRO ESPELHOS

*RUY MADSEN BARBOSA**
UNIRP - SÃO JOSÉ DO RIO PRETO
*CLAUDEMIR MURARI***
IGCE/UNESP - RIO CLARO

RESUMO

Neste artigo os autores fornecem aos professores material para o trabalho em sala de aula, dando continuidade ao seu estudo de obtenção em **caleidoscópios** de pavimentações**, lado –lado, uniformes** com polígonos regulares; buscando bases para colorações múltiplas

Sabe-se que existem mosaicos de 11 tipos de configurações **uniformes** com polígonos regulares:

a) monoedrais :
1- (4,4,4,4) - 4 quadrados,
2- (6,6,6) – 3 hexágonos regulares,
3- (3,3,3,3,3,3) – 6 triângulos equiláteros;

b) não monoedrais:
4- (3,4,6,4), 5- (3,6,3,6), 6- (3,12,12),
7- (4,6,12), 8- (4,8,8), 9- (3,3,4,3,4),
10- (3,3,3,4,4) e 11- (3,3,3,3,6).

As 8 primeiras podem ser obtidas em caleidoscópios de 3 espelhos planos; sendo que a 2, 3, 4, 5, 6 e 7 em caleidoscópios com base triangular equilátera, enquanto a 1 e a 8 em caleidoscópios com bases triângulos retângulos isósceles.

As pavimentações das outras 3 não se consegue obter em caleidoscópios triangulares.

São dadas bases para obtenção em caleidoscópios a 4 espelhos das pavimentações do tipo 9 e 10, para colorações múltiplas.

Como resultado especial particular de uma delas é estudado a obtenção do mosaico monoedral com pentágonos irregulares , freqüente em ruas do Cairo.

Os autores fornecem também bases para caleidoscópios a 4 espelhos cujos visuais são de mosaicos de Alhambra.

CALEIDOSCÓPIOS ?!
Kalos = belo
Eidos = formas
Skopein =ver

Ora.... ! Qualquer figura que desenharmos numa base para 4 espelhos dispostos formando uma superfície prismática retangular de mesma base dará um belo mosaico ! O que será novo?!

LADO-LADO
Toda aresta da pavimentação é comum a dois polígonos.

UNIFORME
Ao redor de todo nó (vértice) da pavimentação temos os mesmos polígonos e na mesma disposição

NOTAÇÃO: *Cada número indica o número de lados do polígono, e o posicionamento a ordem do polígono ao redor de cada nó.*

BALL / COXETER(1987)
BARBOSA-1993 a
BARBOSA-1993 b
BARBOSA- 1996
BARBOSA/MURARI-1996
KINGSTON-1957
MURARI-1994
MURARI- 1995 a
MURARI- 1995 b
MURARI-1996
MURARI/BARBOSA-1996

RANUCCI –(1968)
CLEMENS-(1974)
PARKER-(1975)

Palácio de Alhambra – Granada – Sec. IX

P AVIMENTAÇÃO (3,3,4,3,4) NO CALEIDOSCÓPIO

Primeira solução – 5 cores
CONSTRUÇÃO GRÁFICA DA BASE

A base para se obter a pavimentação uniforme com polígonos regulares de configuração (3,3,4,3,4) deve ser quadrada, e pode ser obtida por dois procedimentos:

1 - Graficamente

a) Fase preliminar (com lápis) **(fig.1)**
Construir um quadrado ABCD de lado "a";
Construir uma semi reta r de origem A;
Marcar um ponto E arbitrário em r;
Levantar em E a perpendicular s à reta r;
Marcar F em s (com o compasso) tal que EF = AE;
Levantar em F a perpendicular t a AF;
Marcar G em t (com o compasso) tal que FG = FE;
Construir v de A e G; marcar H em v (com o compasso) tal que GH = GF;
Marcar J em r (com o compasso) tal que AJ = AH;
Construir por E paralela a JB determinando M em AB;
Marcar (com o compasso) sucessivamente, nos lados do quadrado, os pontos N, P e Q, tais que BN, CP e DQ tenham a mesma medida que AM.

b) Fase da figura - base (com caneta ou hidrográfica preta) **(fig.2)**
Construir com traço contínuo o quadrado MNPQ, e com traço contínuo bem largo os segmentos AM, BN, CP e DQ;
Apagar os segmentos MB, NC, PD e QA, os quais deviam estar ainda a lápis (em nossa figura estão com traços interrompidos); e apagar toda a construção auxiliar.

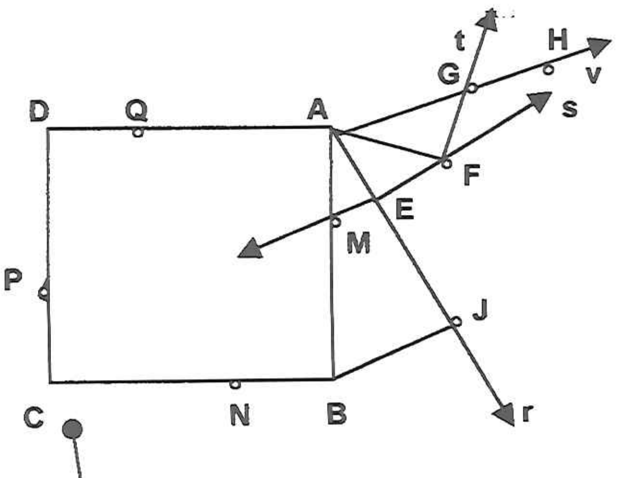

Fig.1- Construção gráfica da base para (3,3,4,3,4)

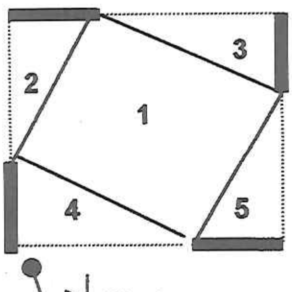

Fig.2- Base do Caleidoscópio

2 - Calculando
É fácil mostrar (com relações métricas)

que AM = a($\sqrt{3}$-1)/2, portanto, pode-se obter a medida de AM na base ABCD, multiplicando-se a medida "a" do lado da base por 0,366; e em seguida proceder como na construção gráfica.

C OLORINDO

Na base quadrada construída para o caleidoscópio ficam formadas cinco regiões: 1, 2, 3, 4 e 5. Cada uma delas pode ser colorida com uma cor

> ***Observação:*** *Ao colorir as regiões 2, 3, 4 e 5 não tem importância, e é até conveniente, que o colorido saia um pouco do quadrado – base onde não existem mais as linhas divisórias que foram apagadas.*

V ISUAL CALEIDOSCÓPICO

O mosaico obtido no caleidoscópio a 4 espelhos apresentará o aspecto da fig. I onde se nota que os quadrados terão todos a mesma cor (usada em 1), e os triângulos equiláteros aparecerão com as cores usadas respectivamente em 2, 3, 4 e 5, mas aos pares de triângulos justapostos (daí a necessidade do traço com maior espessura em AM, BN, CP e DQ, para a divisão perfeita dos triângulos, com a finalidade de não aparentarem simples losangos). É aconselhável não usar cores escuras para os triângulos.

A PRENDENDO SIMETRIA REFLEXIONAL

O professor poderá aproveitar a base (como qualquer outra base de caleidoscópios) para realizar com os alunos algumas atividades gráficas de simetria reflexional.

Forneça cópias (xerox, por exemplo) da base; peça para traçarem as retas dos lados do quadrado – base. Elas serão os eixos de simetria reflexional, correspondentes às intersecções dos 4 espelhos planos respectivamente com o plano do papel sobre a mesa.

Solicite para construírem os segmentos simétricos de cada um dos segmentos da base em relação a cada um dos eixos, e de novo sucessivamente os segmentos simétricos das imagens obtidas nos outros eixos.

Os alunos deverão encontrar uma pavimentação como a da figura 3, o que os ajudará a compreender o que se passa no caleidoscópio.

Uma exploração adequada é construir também os simétricos dos eixos sucessivamente, formando uma rede quadriculada. Agora, em cada quadrado da rede construir nova base, porém em sentidos alternados. Esta técnica poderá ser empregada em trabalhos extra classe.

Segunda solução – 16 cores

CONSTRUÇÃO GRÁFICA DA BASE

Seja a base quadrada AXYZ de lado "b". Dividimos o quadrado em 4 quadrados de lado a = b/2.

Aplicamos num quadrado parcial ABCD a construção anterior (gráfica ou por cálculo) para encontrar AM; e em seguida usamos a mesma medida de AM para os outros quadrados mas alternando os sentidos, como na **fig.3** (observar os traços mais largos).

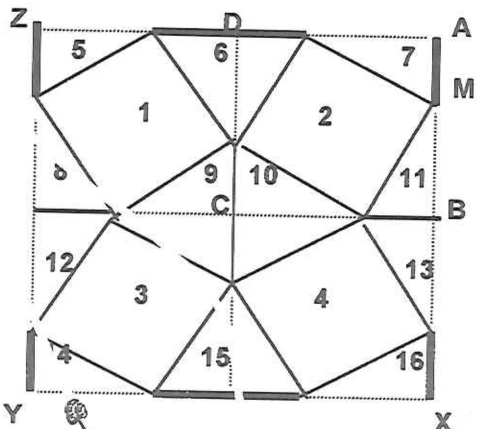

Fig.3
Base do caleidoscópio
Para 16 cores

COLORINDO

Nessa base podemos usar até 16 cores : 4 para quadrados e 12 para triângulos equiláteros. A seguir o leitor observará que é mais estético empregar apenas 13 cores.

VISUAL CALEIDOSCÓPICO

Teremos 6 pares de triângulos justapostos com a mesma cor; são os das cores 5, 6, 7, 14, 15 e 16 da fig.3.

Considerando este fato, pode-se para homogeneizar o visual, usar as cores 8 com 12 , 9 com 10, e 11 com 13 iguais entre si, reduzindo o número de cores para 13; mas neste caso é aconselhável deixar os traços divisórios mais grossos entre cada novo par mono - colorido.

Nota- Pode-se ainda optar por um procedimento alternativo no caso do lado do quadrado – base não estar fixado. Inicia-se então com o quadrado MNPQ de lado arbitrário; depois, construir o quadrado ABCD de tal forma que seus lados formem ângulos de 60 e 30 graus com os lados do quadrado anterior.

PAVIMENTAÇÃO (3,3,3,4,4) NO CALEIDOSCÓPIO

Primeira solução – 6 cores

CONSTRUÇÃO GRÁFICA DA BASE

A base para esta pavimentação deverá ser retangular; porém agora as medidas do retângulo-base podem ser obtidas posteriormente, ficando em dependência da figura construída o que facilita bastante.

*a) Fase preliminar (com lápis) (**fig. 4**)*

Marcar um ponto A arbitrário;
Construir r e s perpendiculares por A;
Marcar B arbitrário em r;
Marcar (com o compasso) C em s tal que AC = 2.AB ;
Construir t por C perpendicular a s;
Marcar (com o compasso) D em t tal que CD = AB ;
Construir o triângulo equilátero BDE;
Construir por E perpendicular a r determinando F em r e G em t;
Marcar (com o compasso) H em r e J em t tais que FH e GJ sejam iguais a AB;
Construir o segmento HJ e marcar (com o compasso) K em HJ tal que HK = AB.

*b) Fase da figura - base (com caneta ou hidrográfica preta).(**fig.5**)*

Construir os segmentos BD,DE,EB,GE,EF, e EK com traço contínuo, e os segmentos AB e CD com traço contínuo mais grosso;

Apagar os segmentos restantes (que estão na **fig.5** com traço interrompido).

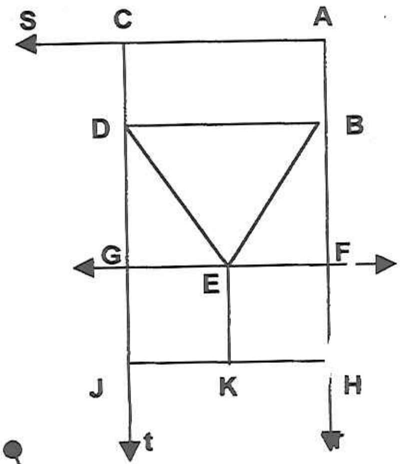

Fig.4- Construção gráfica da base para (3,3,3,4,4)

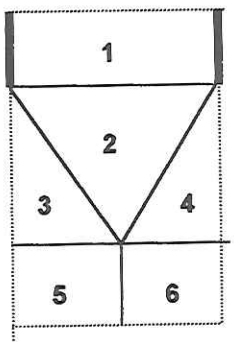

Fig.5 – Figura-base para o caleidoscópio

COLORINDO

A figura- base divide o retângulo-base em 6 regiões que podem ser coloridas com 6 cores: 1, 2, 3, 4 , 5 e 6, sendo as cores 1, 5 e 6 para quadrados. Novamente as cores, com exceção da n.2 , podem ultrapassar o retângulo base. Não use cor escura em 1.

VISUAL CALEIDOSCÓPICO

O visual caleidoscópico se apresenta ao espectador com uma faixa de quadrados com a cor n.1, uma faixa de triângulos com a cor n.2, intercalada com outra faixa de triângulos com as cores alternadas n.3 e n.4.

Apresenta ainda outra faixa de quadrados, esta com as cores n.5 e n.6 alternadas **(fig. II)**

Segunda solução – 10 cores

CONSTRUÇÃO GRÁFICA DA BASE

a) *Fase preliminar (com lápis) (fig.6)*

Marcar um ponto A arbitrário;
Construir r e s perpendiculares por A;
Marcar um ponto B arbitrário em r;
Marcar (com o compasso) os pontos C e D em s tais que AC = 2. AB, e CD = AC;
Marcar E (com o compasso) em t s em D com DE = AB;
Construir BE;
Construir CF $\perp$ BE;
Construir (com o compasso) o DEFG e o DBFH equiláteros;
Construir a reta de G e H determinando J e K respectivamente em r e s;
Marcar (com o compasso) M em r, N em s tais que JM = KN = AB;
Construir a reta de N e M;
Marcar (com o compasso) P e Q nessa reta tais que MQ e NP sejam iguais a AB;
Construir HQ e GP.

b) Fase da figura – base (com caneta ou hidrográfica preta)

Construir com traço contínuo todos os segmentos indicados, exceto AB e DE que devem ser com traço contínuo mais grosso.

Apagar os segmentos restantes (que estão indicados na fig.6 com traço pontilhado).

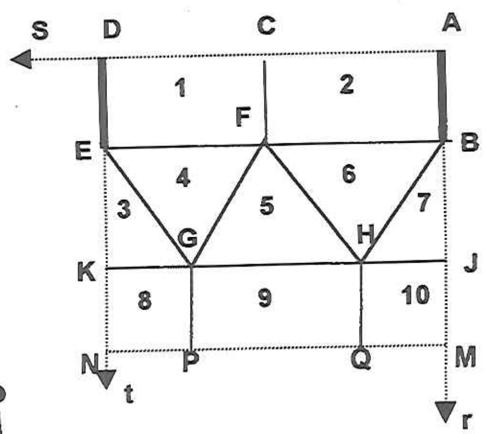

Fig.6- Figura – base para o caleidoscópio

C OLORINDO

Na figura - base retangular obtida para o caleidoscópio estão formadas 10 regiões. Cada uma pode ser colorida com uma cor.

Ao colorir as regiões, exceto as numeradas 4, 5 e 6, pode-se ultrapassar um pouco o retângulo – base (é até conveniente para melhor reflexão das cores).

V ISUAL CALEIDOSCÓPICO

O visual apresentará os quadrados de cor 1 aos pares contíguos monocoloridos; o mesmo acontecendo com os de cor 2.

Teremos portanto, uma faixa de quadrados , alternadamente 2 com cor 1 e 2 com cor 2, daí a recomendação para usar as cores 1 e 2 não escuras. Uma faixa de triângulos equiláteros com cores 3, 4, 5, 6 e 7; e nova faixa de quadrados com cores alternadas 8, 9 e 10.

E A PAVIMENTAÇÃO DE CONFIGURAÇÃO (3,3,3,3,6) ?!

A pavimentação uniforme de configuração (3,3,3,3,6) não apresenta eixo de simetria reflexional, de onde segue que é impossível a sua obtenção em caleidoscópio com qualquer número de espelhos planos !

P AVIMENTAÇÃO COM PENTÁGONOS

Não existe pavimentação do plano com pentágonos regulares congruentes, o que deve ter sido notada sua ausência na lista das 11 pavimentações uniformes. O professor pode mostrar aos seus alunos (conforme Barbosa-1993a) realizando alguma experimentação simples com material concreto. Bastará colocar 3 peças de pentágonos regulares ao redor de um ponto, utilizar-se-á 324^0, e empregando-se 4 usar-se-ia 432^0 , havendo respectivamente lacuna e remonte.

O mais interessante do pentágono é que justamente ele, que não pavimenta uniformemente o plano com regulares congruentes, pavimenta de diversas maneiras com pentágonos irregulares congruentes.

Entre essas pavimentações com pentágonos irregulares congruentes uma delas pode ser obtida facilmente no caleidoscópio a 4 espelhos aproveitando-se a base para a configuração (3,3,4,3,4) .

C ONSTRUÇÃO GRÁFICA DA BASE

Seja que construímos a base quadrada ABCD e nela já obtivemos o quadrado MNPQ **(dada na fig.1)**.

Construímos então os segmentos MP e NQ (que devem ser perpendiculares entre si) determinando o centro O; pelo centro O construímos (com traço contínuo) as perpendiculares aos lados dos quadrados, até encontrarem os lados da base- quadrada nos pontos X, Y, Z e W. Os segmentos AW, BX, CY e DZ devem ficar com traço contínuo grosso. Apague as linhas que estão na figura com traço interrompido

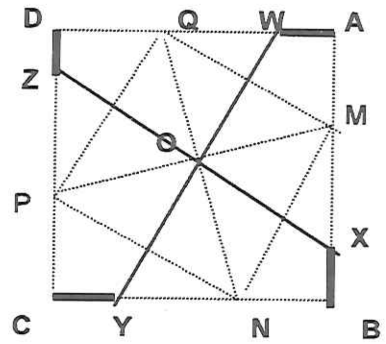

Fig.7: Figura – base quadrada para obtenção em caleidoscópios da pavimentação dual da pavimentação (3,3,4,3,4), com pentágonos irregulares congruentes .

Chama-se *padrão dual* aquele que é obtido traçando-se as arestas correspondentes a cada dois pontos centrais contíguos. Os pontos X, Y, Z e W são os centros dos triângulos equiláteros; quantas explorações possíveis ! **(Ver fig. III)**.

C OLORINDO

A figura – base forma 4 regiões que podem ser coloridas com 4 cores.

V ISUAL CALEIDOSCÓPICO

O mosaico obtido possui todos pentágonos congruentes com 4 lados congruentes; 3 ângulos de

120^0 e 2 de 90^0. Contudo dois a dois justapostos com a mesma cor **(fig. III)**.

OUTRA BASE

Cremos que o leitor observou que na construção anterior poderíamos ter marcado apenas os pontos M, N, P e Q **(da fig.1)**. Depois construiríamos simplesmente com traço contínuo os segmentos MP e NQ (perpendiculares entre si). Teríamos obtido outra figura- base para pavimentação com pentágonos irregulares congruentes, novamente com 4 lados congruentes, mas com 2 ângulos de 90^0, um de 150^0, e 2 de 105^0 **(Ver fig. IV)**.

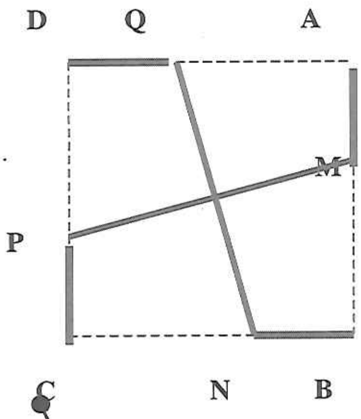

Fig.8: Figura – base quadrada para obtenção em caleidoscópios de pavimentação com pentágonos irregulares congruentes.

UMA BASE ESPECIAL

Após o conhecimento das bases anteriores o leitor já deve ter concluído que é fácil obter uma base que forneça em caleidoscópio uma pavimentação com pentágonos irregulares congruentes com 4 lados congruentes. Bastará traçarmos dois segmentos perpendiculares entre si a partir do centro do quadrado – base, desde que determinem o ponto M no lado AB, tal que $0 < AM < AB/2$. Entretanto, em particular, pode-se provar que se

$AM = AB(\sqrt{7}-1)/6 \cong 0{,}274.AB$ os ***pentágonos*** serão ***equiláteros*** **(Ver fig. V)**.

Nota: *Consta-nos que a pavimentação de pentágonos irregulares congruentes é bastante freqüente em ruas do Cairo / Egito, porém numa situação especial nas quais os vários blocos hexagonais, de 4 pentágonos, alternadamente possuem os lados colineares, fornecendo um aspecto visual agradável à vista (Observar que na **fig. III** isso não acontece).*

MOSAICOS DE ALHAMBRA EM CALEIDOSCÓPIO A 4 ESPELHOS

Os ornamentos do Palácio de Alhambra (Granada-Espanha), construído a partir do Sec. IX pelos mouros que ocuparam a peninsula ibérica por 8 séculos, são de rara beleza. Possui Alhambra várias torres, entre elas a de Comares, em cuja alcova do salão do trono destaca-se um mosaico azulejado. A figura - base seguinte mostra como obtê-lo em caleidoscópio a 4 espelhos com base-quadrada.

CONSTRUÇÃO GRÁFICA DA BASE

Divide-se a base - quadrada em 4 quadrados. Construímos com traço contínuo os segmentos que passam pelo centro do quadrado – base com extremos nos centros dos quadrados parciais. De cada centro construímos com traço contínuo um segmento de perpendicular ao lado do quadrado – base (conforme a **fig. 9**). Apaga-se todas as construções auxiliares, que estão na figura com traço interrompido.

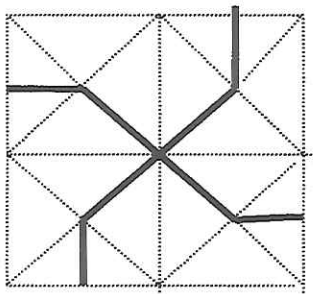

Fig.9: Figura – base para obtenção em caleidoscópio de mosaico da Torre de Comares (Ver fig. VI).

COMPENSAÇÕES

A peça que se reproduz no caleidoscópio é um dos bons exemplos de Alhambra como possível inspirador de Maurice Cornelius ESCHER, o notável artista holandês dos contornos duplos e compensações. Basta observar a sucessão de figuras seguintes:

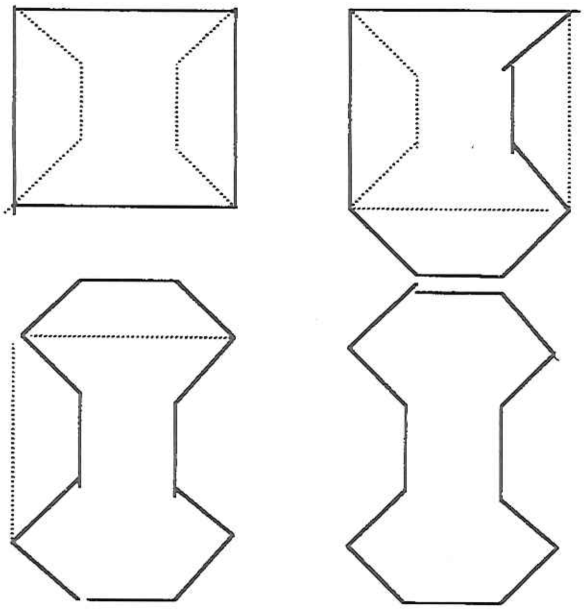

Fig.10: Sucessão de compensações num quadrado para se obter o arquétipo do mosaico da Torre de Comares.

Nota- *Nas anotações de Escher, quando de sua visita a Alhambra em 1936, constava este mosaico da Torre de Comares; bem como entre outros aquele da figura - base – quadrada para caleidoscópio que oferecemos a seguir resumidamente.*

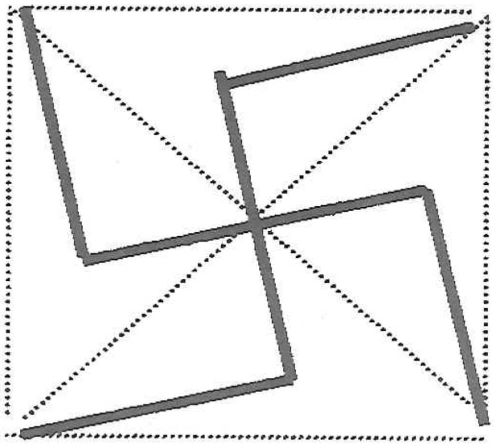

Fig.11: Figura – base para obtenção em caleidoscópio de mosaico de anotações de Escher(1936) de Alhambra. (Ver fig. VII)

FIGURAS DOS MOSAICOS

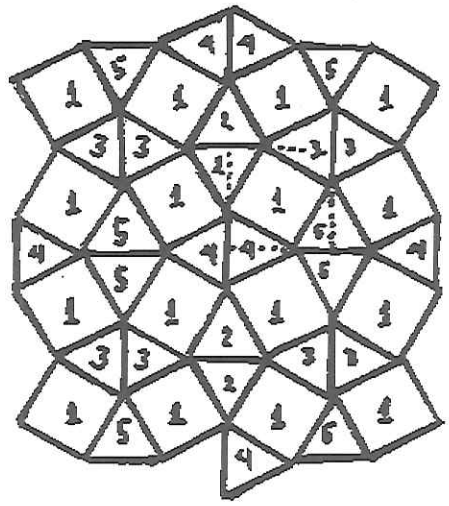

Fig. I: Pavimentação Uniforme (3,3,4,3,4) em caleidoscópio, a 4 cores.

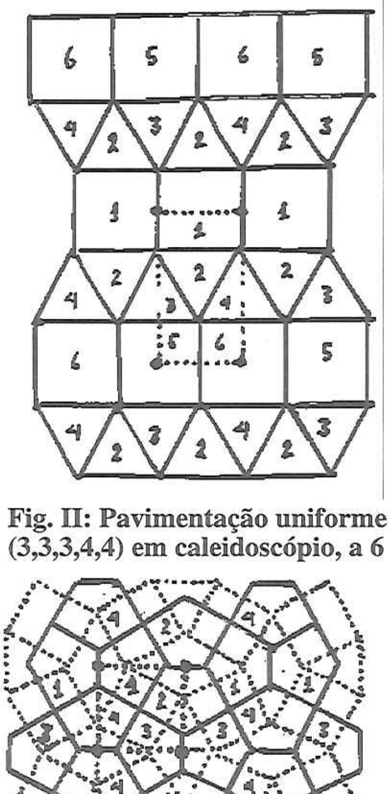

Fig. II: Pavimentação uniforme (3,3,3,4,4) em caleidoscópio, a 6 cores.

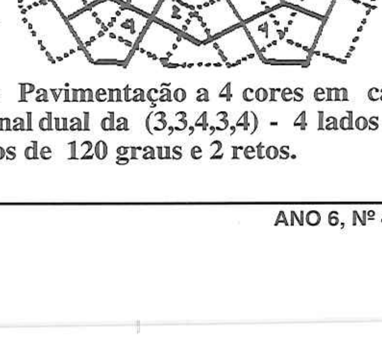

Fig. III: Pavimentação a 4 cores em caleidoscópio, pentagonal dual da (3,3,4,3,4) - 4 lados congruentes, 3 ângulos de 120 graus e 2 retos.

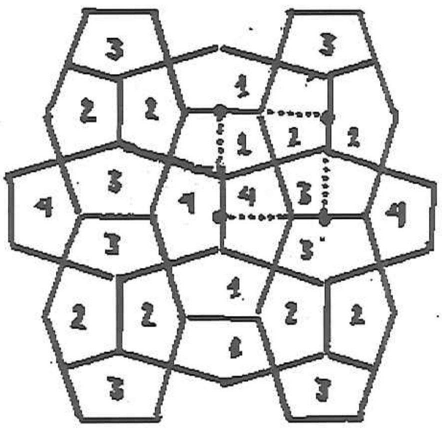

Fig. IV: Pavimentação a 4 cores em caleidoscópio, pentagonal - 4 lados congruentes, 2 ângulos retos, dois de 105 graus e um de 150 graus.

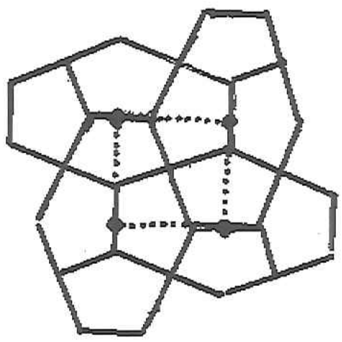

Fig. V: Pavimentação pentagonal equilátera em caleidoscópio – 2 ângulos de 114 ° 18', um de 131° 24', e 2 retos.

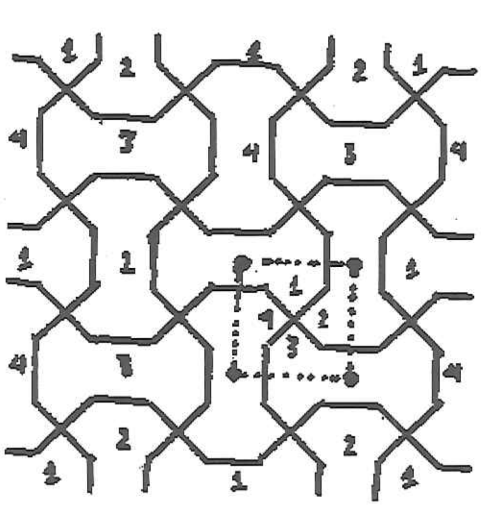

Fig. VI: Mosaico da Torre de Comares – Alhambra, em caleidoscópio.

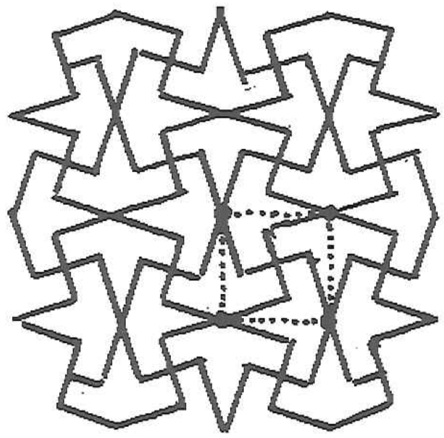

Fig. VII: Mosaico de anotações de Escher, Alhambra (1936) , em caleidoscópio.

DISPOSIÇÃO DOS ESPELHOS

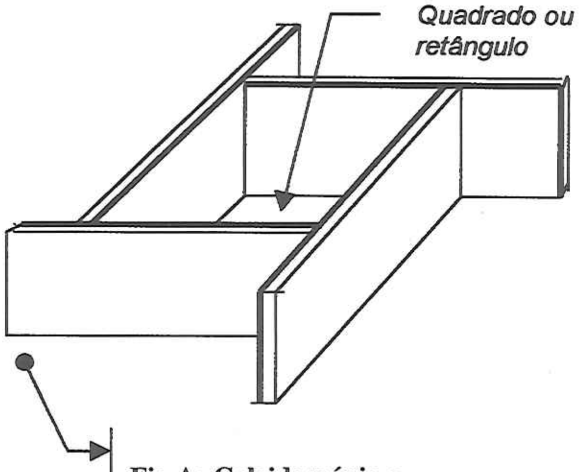

Fig.A: Caleidoscópio a 4 espelhos planos

Obs.*- Poderão também ser usados dois pares de espelhos planos articulados do Kitcalei ou Mini Kitcalei (Ver Barbosa 1997).*

APÊNDICE (*matemático*)

Para caleidoscópios a 3 espelhos planos existem 3 possibilidades para as bases - triangulares: triângulos equiláteros (60°,60°, 60°), triângulos retângulos isósceles (90°,45°,45°), triângulos retângulos escalenos (90°,60°,30°) (Ver Barbosa 1993a) . Vejamos no caso em pauta, para 4 espelhos, qual a forma angular do quadrilátero-base.

Para que as imagens coincidam em cada ângulo de par de espelhos devemos ter que o seu dobro seja divisor de 360°, ou que cada ângulo do quadrilátero precisa ser divisor de 180°; portanto colocando $180/a_i = n_i$ (inteiro positivo, i = 1, 2, 3, 4, com $n \geq 2$) em $a_1+a_2+a_3+a_4 = 360°$, encontramos

$$1/n_1 + 1/n_2 + 1/n_3 + 1/n_4 = 2 \qquad (1)$$

Supondo, sem perda de generalidade que $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$ teremos, substituindo em (1) todos por n_1, que $n_1 \leq 2$, de onde $n_1 = 2$.

Substituindo em (1) encontra-se que

$$1/n_2 + 1/n_3 + 1/n_4 = 3/2 \qquad (2)$$

Novamente, trocando todos por n_2 em (2) encontramos $n_2 \leq 2$, então necessàriamente também $n_2 = 2$.

Com argumentação análoga encontramos sucessivamente $n_3 = n_4 = 2$.

Em conseqüência, resulta que os quatro ângulos são retos, que implica a necessidade de se dispor os 4 espelhos formando por base um retângulo ou, é claro, um quadrado.

Em outras palavras, todo caleidoscópio a 4 espelhos planos deve formar uma superfície prismática de base retangular, aliás como empregamos neste trabalho.

Nota:

Estudo análogo conduz para k espelhos à desigualdade $k / n_i \geq k - 2$ e como $n_i \geq 2$ (i = 1, 2, 3,... k) resulta ser

$$k \leq 4$$

isto é:

Não é possível se obter coincidências de todas imagens em caleidoscópios com mais que 4 espelhos planos.

* *R.M.Barbosa-*
R.Santa Ernestina, 707, Jd. Guarany
13095-320, Campinas, S.P.
Tel.(019) 2 52 70 48
** *C, Murari*
Av. 24 A, 1515
13506-900,Rio Claro, S.P.
Tel (019) 5 34 01 23

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALL,R. & COXETER,M.C.H.- *Mathematical Recreations and Essays*,Univ. Toronto, 1974, republication by Dover,N.Y.,1987.

BARBOSA,R.M.- *Determinação do número de imagens em espelhos planos*. Atualidades Pedagógicas, 40 (1957) 5 – 8.

BARBOSA,R.M.- *Descobrindo padrões em mosaicos*, S.P., Atual, 1993a.

BARBOSA,R.M.- *Novo processo para padrões de polígonos regulares de configuração (3,4,6,4) no caleidoscópio equilátero*. Com. III EPEM/UNESP-SBEM; Baurú / SP, Anais p.71.

BARBOSA,R.M. – *Pavimentação do plano com hexágonos regulares usando caleidoscópios equiláteros para coloração múltipla* – IV EPEM, S.Paulo, PUC / SBEM-SP, jan./1996, ANAIS, 1996, 249-255.

BARBOSA,R.M.- *KITCALEI (e MINI KITCALEI)*, Trenzinho - Brinquedos Educativos, S.P. – 1997.

BARBOSA,R.M. e MURARI,C.- *Mosaicos ornamentais em caleidoscópios isósceles e equiláteros*, IV EPEM , S.Paulo, PUC / SBEM –SP, Anais, 187 – 193.

BISHOP,T.D. and FETTERS,J.V.- *Mathematical reflections and relations on other isometries*, Mathematics Teacher, 69 (1976) 404-407.

CLEMENS,S.R.- *Tesselations of Pentagons*, Mathematics Teaching, 67 (1974) 18-19.

DAFFER,E.R. and CLEMENS,R.S.- *Geometry: an investigative approach*, Addison-Wesley, Menlo Park, 1977.

GREENBURY,G.- *Mirror mosaics*, The Australian Mathematics Teacher, 47-2 (1991) 14 - 15.

GRUNBAUM,B. and SHEPHARD,G.C.- *Tillings and patterns : an introduction*, Freeman, N.Y. ,1989.

JACOBS,H.R. - *Mathematics: a human endeavor*, S.Francisco, Freeman, 1970.

JACOBS,H.R.- *Geometry*, N.Y., Freeman, 1974.

KINGSTON,M. – *Mosaics by reflections*, Mathematics Teacher, 50 (1957) 280-286.

LOCHER,J.L. – *The world of M.C. Escher*, Abrans, N.Y., 1988.

MURARI,C. – *Pavimentação de configuração (3,3,3,3,3,3) no caleidoscópio equilátero com* coloração múltipla; Com. I-EEMRNP/FIRP-SBEM, junho/1994, S.J.R.Preto/SP, Resumos, p.3.

MURARI,C.- *Um caleidoscópio educacional modificado para trabalho em grupo*. Rev. de Educação Matemática, SBEM – S.P, 2 (1995) 11 - 15.

MURARI,C. – *Pavimentação de configuração (3,12,12) no caleidoscópio com colorações múltiplas* Com. V – ENEM / UFS – SBEM, Aracajú/SE – julho/ 1995.

MURARI,C. – *Brincando e aprendendo com o caleidoscópio equilátero em pavimentação de configuração (3,3,3,3,3,3)*, Educação Matemática em Revista, SBEM, 4 (1995) 31-38.

MURARI,C. – *Pavimentação do plano de configuração (4,6,12) usando caleidoscópio equilátero para colorações múltiplas*. IV – EPEM – S.Paulo, PUC / SBEM – SP, jan./1996, Anais, 1996, 263 – 268.

MURARI,C. e BARBOSA,R.M.- *Pavimentação do plano em quadrados usando caleidoscópios isósceles para colorações múltiplas*. IV- EPEM –S.Paulo, PUC / SBEM – SP, jan. /1996, Anais, 1996, 249 – 255.

PARKER,J. – *Tesselation of pentagons*, Mathematics Teaching, 70 (1975) 34.

RANUCCI,E.R.- *A tiny treasure of tesselations*, The Mathematics Teacher, 61-1(1968)114 –117.

SCHATTSCHNEIDER,D.- *Tiling the plane with congruent pentagons*, Mathematics Magazine,51-1 (1978) 29-44.

VARIOS AUTORES – Trabalhos In: La Alhambra, Epsilon (número especial), Ass. dos Professores de Matematricas de Andalucia/ Granada/1987 – Cons. De Cultura de la Junta de Andalucia/Sevilha/1987.