

AMBIENTE CARTESIANO CABRI- Géomètre: GEOMETRIA ANALÍTICA

RUY MADSEN BARBOSA*
MARCOS LUIZ LOURENÇO**

I NTRODUÇÃO

O CABRI-géomètre, já está consagrado como um ótimo software educacional para atividades de descoberta de conceitos e propriedades de figuras geométricas planas, face principalmente ao seu *caráter interativo*, bom número de *opções de seu menu*, várias *macros em arquivo*, possibilidade de *construção de novas macros*, *lugares geométricos*, e do modo *agarrar - arrastar* que permite utilizá-lo *aliando-o à metodologia de inferência plausível e credibilidade* por nós recomendada, e da existência de dois princípios básicos: *Princípio de conservação de relações*, e *Princípio de independência e dependência*, conforme temos denominado.

Contudo, em geral, salvo raras exceções, a sua utilização, no Brasil e mesmo em outros países, *se restringe à geometria euclidiana plana* e algumas *investidas em trigonometria*.

O Grupo de Estudos e Pesquisa em Softwares Educacionais, que vem há alguns anos se dedicando entre outros softwares ao CABRI, principalmente ao CABRI I, que é o mais usado no Brasil e em vários países, inicia com este trabalho dos professores Ruy e Marcos (ambos da UNIRP-São José do Rio Preto, onde o mesmo faz parte do programa da disciplina anual do 4º ano da licenciatura em matemática "*Computação aplicada ao ensino da matemática*"), a divulgação de alguns de seus resultados iniciais.

Vamos nos **limitar neste primeiro trabalho** a apresentar como criar o **Ambiente - cartesiano CABRI I**, com seu sistema de eixos, e o emprego de uma **nova e simples macro** para atividades usuais iniciais em **geometria analítica plana** (ao nível do ensino médio - curso colegial, ou mesmo ao nível do ensino do terceiro grau).

A seguir, **ainda nos limitaremos**, neste artigo inicial, primeiro de uma série, a apresentar apenas uma **ampliação do ambiente - cartesiano** com uma **macro para retas** dadas pela equação na forma $y = a x + b$. Ressaltamos que a ampliação do ambiente e a macro permite dinamismo com o modo *agarrar - arrastar modificando*, ao interesse do usuário, ou o

coeficiente angular ou o **coeficiente linear**, ou ambos, com um procedimento bastante fácil. A incorporação da primeira macro e de outros recursos do CABRI permite realizar atividades de vários tipos sobre o tema **Retas em Geometria Analítica**.

C RIANDO O AMBIENTE- CARTESIANO CABRI-I

1. Criar na tela a reta definida para dois pontos próximos (opção: Reta def. 2 pts - menu: Criação), de preferência horizontal.

2. No primeiro ponto (da esquerda) construir a perpendicular à reta (opção: reta perpendicular - menu: Construção).

3. Nomear "1" o segundo ponto (opção: Nomear - menu: Edição).

4. Criar a circunferência de centro no cruzamento e passando pelo ponto 1 (opção: Circunf. por 2 pts - menu: Criação).

Determinar as intersecções dessa circunferência com as retas perpendiculares (opção: Intersecção de 2 objetos - menu: Construção);

Construir sucessivamente e respectivamente nas duas retas os pontos das escalas dos eixos das abscissas e das ordenadas (opção: Ponto simétrico - menu: Construção)

Nomear esses pontos +1, +2, +3, +4, ...

e -1, -2, -3, -4, num e em outro eixo.

(Ver fig. 1) - e apagar a circunferência (menu: Edição-opção: Aspecto dos objetos - > cursor borracha);

UNIFORMIZAÇÃO

Nota prévia: Pode-se uniformizar o ambiente - cartesiano com a unidade de medida do software (a uniformização é necessária no caso de utilização da opção

"medir"), o que se obtém com o segmento da origem ao ponto de abscissa 1, que deve ter medida 1.

Observação: Julgando conveniente poderá melhorar a escala marcando pontos médios.



RIANDO UMA MACRO "PONTO- COORDENADAS"

Figura preliminar

1. Marcar um ponto arbitrário no ambiente – cartesiano;
2. Construir as perpendiculares pelo ponto aos eixos;
3. Determinar as intersecções com os eixos;
4. Apagar as perpendiculares (se preferir);
5. Determinar os segmentos das perpendiculares do ponto aos pontos de intersecção.

Construindo a nova macro:

Usar como objetos iniciais:

eixos e o ponto

Usar como objetos finais:

os segmentos

Denominar a nova macro, por exemplo

"Ponto-coordenadas"

Alternativa: Não construir os segmentos e usar como objetos finais os pontos de intersecção, que neste caso deverão ser realçados.

(Ver fig. 2)

Aprendendo a usá-la:

Dado um ponto qualquer no ambiente- cartesiano chame a macro: Clique nos eixos e depois no ponto, deverão aparecer os dois segmentos de perpendiculares. Por leitura direta nos eixos observe a abscissa e a ordenada.

Deslocar o ponto com o modo agarrar – arrastar para qualquer posição (outros quadrantes ou semi – eixos coordenados), e observar as suas coordenadas como indicado acima. Essas atividades facilitam a aprendizagem dos sinais das coordenadas conforme os quadrantes ou semi eixos. Ou mesmo criar outros pontos dispostos nos vários quadrantes ou semi-eixos, nomeá-los e para cada um usar a macro.

Nota: Caso as coordenadas sejam dadas o usuário pode usar a mesma macro deslocando o ponto para a posição conveniente satisfazendo os dados, e observar o posicionamento do ponto; ou então construir uma outra macro usando como objetos iniciais além dos eixos os pontos respectivos dos semi – eixos, e o ponto como objeto final; neste caso sugerimos denominá-la "Coordenadas – ponto".

APLICANDO A MACRO

1) Distância de dois pontos dados pelas coordenadas

Criar dois pontos no ambiente – cartesiano, usar a macro para cada um, posicioná-los adequadamente.

Construir o segmento de extremos nos dois pontos. Medir o segmento.

Nota: Necessita uniformização de unidades.

2) Perímetro ou tipo de um triângulo dado pelas coordenadas dos vértices.

Criar 3 pontos no ambiente – cartesiano, usar a macro para cada um, posicioná-los adequadamente. Determinar os 3 segmentos – lados do triângulo. Medí-los.

2.1- Para **perímetro** é só somar as 3 medidas. (Ver fig.3-triângulo ABC ou DEF)

2.2- Para determinar o **tipo quanto aos lados** é só compará-los para decidir se é ou equilátero, ou isósceles ou escaleno.

2.3- Para determinar o **tipo quanto aos ângulos** é só verificar se o quadrado da medida do maior é ou maior, ou igual, ou menor que a soma dos quadrados das medidas dos outros dois, então decidirá respectivamente se o triângulo é ou obtusângulo, ou retângulo, ou acutângulo.

É claro, que poderão ser realizadas, com o Cabri, explorações verificadoras marcando e medindo os 3 ângulos internos do triângulo (ver fig.3)

Nota: Necessita uniformização de unidades.

3) Coordenadas de pontos notáveis de um triângulo

Posicionando adequadamente os vértices de um triângulo no ambiente – cartesiano, várias aplicações de determinação das coordenadas de pontos notáveis do triângulo são fáceis, por exemplo:

Coordenadas do Baricentro Basta construir duas medianas (ou uma macro adequada), determinar a sua intersecção e usar a mesma macro para esse ponto. (Ver fig.3-ponto G do triângulo ABC)

Coordenadas do Circuncentro: Basta construí-lo determinando a intersecção de duas mediatrizes, e usar a mesma macro para esse ponto (Ver fig.3-ponto O do triângulo DEF)

Coordenadas do Inscentro: Basta construí-lo determinando a intersecção de duas bissetrizes internas, e usar a mesma macro para esse ponto.

Coordenadas do ortocentro: Basta construí-lo determinando a intersecção de duas alturas do triângulo, e usar a mesma macro para esse ponto. (Ver fig.4- ponto H do triângulo ABC)

4) Distância de um ponto à uma reta definida por dois pontos

Pede-se a distância de um ponto, dado pelas suas coordenadas, à reta definida por dois outros pontos dados pelas suas coordenadas.

Basta criar 3 pontos no ambiente cartesiano. Usar a macro para cada um. Posicioná-los adequadamente em função de suas coordenadas. Determinar o segmento de perpendicular de um deles à reta definida pelos outros dois e medí-lo. (Ver fig.4-distância de P à reta de K e J)

Nota: Necessita uniformização de unidades.

5) Coordenadas de pontos que dividem um segmento numa razão dada

São dados dois pontos A e B pelas suas coordenadas

e pede-se as coordenadas de um ponto P que divide o segmento numa razão dada $k = AP/BP$.

Cria-se inicialmente 2 pontos na tela, usa-se a macro para cada um, e posiciona-se adequadamente os pontos para que sejam A e B.

Para $k = -1, -3$ ou $-1/3, -5/3$ ou $-3/5, -7/8$ ou $-1/8 \dots$ etc. determina-se facilmente o ponto P com a opção *ponto médio* do Cabri, aplicada uma, duas, ou três vezes, etc.

Para outros valores porém, se faz necessário construções especiais.

Para valores positivos de k, por exemplo, 3 ou $1/3, 5$ ou $1/5$, pode-se aplicar a opção *ponto médio* seguida da opção *ponto simétrico*.

Depois é só aplicar a macro *Ponto-coordenadas* para o ponto obtido e observar as suas coordenadas. (ver fig.5 - ponto P que divide AB na razão $k = -1/3$ e Q que divide na razão $k = 5$).

LEMBRETE

É claro que, a leitura das coordenadas em geral não é precisa, desde que é dependente da acuidade visual; assim como as questões que envolvem a opção *medir* do CABRI, pois estas dependem da aproximação do software. Algumas dessas falhas podem ser reduzidas. No entanto, o trabalho simultâneo e integrado do software com os cálculos usuais empregados atualmente em geometria analítica além de se prestar como **agente motivador, ou auxiliar e facilitador notável de procedimentos didáticos** em sala de aula, pode ser valioso como um **controlador ou estimador** de respostas.

* * *



RIANDO UMA MACRO PARA RETAS DA FORMA $y = ax + b$

Figura preliminar:

1. Criar a reta definida por dois pontos próximos (de preferência horizontal);
2. Construir pelo primeiro ponto a perpendicular (portanto vertical);
3. Construir pelo segundo ponto a perpendicular (portanto também vertical);
4. Construir um ponto pertencente à primeira reta (criada em 1), de preferência mais à direita dos dois primeiros;
5. Construir por esse ponto a perpendicular à primeira reta (criada em 1);
6. Construir um ponto pertencente à reta vertical (construída em 2) e um ponto pertencente à terceira reta vertical (construída em 5);
7. Construa pelo ponto pertencente à primeira reta vertical (marcado em 4) a paralela à primeira reta (criada em 1)

8. Determine a intersecção da segunda reta vertical (construída em 3) com a reta construída em 7.

9. Crie a reta definida por esse ponto de intersecção (de 8) e pelo ponto construído em 4;

10. Construa pelo segundo ponto (marcado em 6) a reta paralela à reta criada em 9;

11. Determine a intersecção das retas de 9 e de 10;

12. Crie a reta definida pelo primeiro ponto marcado em 4 e pelo ponto obtido em 11.

(Ver fig. 6)

Construindo a nova macro

Use como objetos iniciais:

A reta criada em 1), a reta criada em 2), o segundo ponto inicial, o ponto marcado em 4), e os pontos marcados em 6), nessa ordem.

Use como objeto final:

A reta obtida em 12.

Denominação:

Sugerimos denominar a macro:

"Reta $y = ax + b$ "

ou

"Reta coeficiente angular-linear"

Ajuda:

É conveniente colocar na ajuda o seguinte texto:

"Selecionar o eixo das abscissas, o eixo das ordenadas o ponto "1" do semi eixo positivo das abscissas, o ponto de cota nula, o ponto "b", o ponto de cota "a", nessa ordem. Aparecerá a representação no sistema cartesiano da reta $y = ax + b$ ".



PRENDENDO CONSTRUIR RETA DA FORMA $y = ax + b$

Construir o ambiente - cartesiano CABRI (uniformizado ou não).

I- Ampliando o ambiente - cartesiano

Marcar um ponto sobre o semi eixo positivo das abscissas bem à direita, e levantar a perpendicular a esse eixo. Esse ponto marcado será o ponto de cota zero.

Construir pelo ponto 1 do semi eixo positivo das ordenadas a paralela ao eixo das abscissas.

Determinar a intersecção da paralela anterior com a perpendicular levantada. Esse ponto de intersecção será o ponto de cota 1.

Com a opção *ponto simétrico* construir sucessivamente vários pontos de cotas 2, 3, 4, ..., para cima, e -1, -2, -3, -4, ... para baixo, transformando a perpendicular numa escala de cotas para o coeficiente angular "a".

Construir pertencente ao eixo das ordenadas um ponto e o nomear "b". É conveniente colorir-lo com pincel e uma cor viva, por exemplo vermelho.

Construir pertencente à escala de cotas um ponto e o nomeá-lo "a". É conveniente colorir-lo com pincel e a mesma cor anterior (vermelho).

(Ver fig. 7)

II- Usando a macro "Reta $y = a x + b$ "

Chamar a macro. Siga a ajuda: selecione os eixos (na ordem: das abscissas e depois das ordenadas), ponto "1" do eixo das abscissas, ponto de cota nula, ponto "b", e ponto "a", nessa ordem. O software desenhará a reta representação da função $y = a x + b$ correspondente.

É adequado colorí-la, por exemplo com o vermelho (mas não espessa).

Agarrar o ponto "b" e o deslocar sobre o eixo das ordenadas, então a reta se deslocará mantendo a inclinação.

Agarrar o ponto "a" e o deslocar sobre a escala de cotas, então a reta se inclinará conforme o coeficiente angular mantendo o seu ponto de intersecção com o eixo das ordenadas.

III-USANDO OUTROS RECURSOS

III-1- Observando o ponto de intersecção da reta com o eixo das abscissas

Algumas explorações podem ser realizadas simplesmente observando o quociente, do valor de "b" (com sinal trocado) pelo valor da abscissa do ponto de intersecção da reta com o eixo das abscissas, comparativamente com o valor de "a".

(Ver fig.8)

III-2- Observando ângulos

Determinar o ponto de intersecção I da reta com o eixo das abscissas. Marcar um ponto pertencente ao semi eixo negativo das abscissas bem afastado à esquerda. Marcar respectivamente os dois ângulos da reta com o eixo das abscissas usando de preferência os 3 pontos: o marcado à esquerda, o ponto I, e o ponto b, e os 3 pontos: o ponto de cota nula (marcado à direita), o ponto I, e o ponto b. Meça-os.

Deslocar a reta para várias posições, e para cada uma, fazer explorações relativas ao coeficiente angular "a" e os ângulos (use se necessitar uma tabela de tangentes trigonométricas).

(Ver fig.8)

III-3- Observando pontos sobre a reta

Construir um ponto P pertencente à reta (sugerimos colorí-lo preto com pincel). Usar a macro "Ponto-coordenadas" para o ponto P.

Deslocar o ponto P sobre a reta para várias posições. Para cada uma observar as suas coordenadas por leitura direta nos eixos. Verificar os seus valores na equação da reta $y = a x + b$ correspondente.

Mudar a posição da reta para outros valores de a e de b, e repetir as atividades anteriores.

Organizar alguns exercícios de cálculo de ordenada (ou de abscissa) dada a abscissa (respectivamente ordenada), com verificação na representação geométrica da reta na tela do ambiente – cartesiano ampliado.

(Ver fig.8)

III-4- Calculando a distância de um ponto a uma reta dada pela sua equação

Seja dado um ponto Q pelas suas coordenadas e a equação da reta.

Construir a representação geométrica da reta correspondente no ambiente – cartesiano ampliado. Marcar um ponto qualquer, usar para ele a macro "ponto-coordenadas", posicioná-lo adequada-mente em função das coordenadas de Q. Nomeá-lo Q. Determinar o segmento de perpendicular de Q à reta. Medí-lo para obter a distância solicitada.

Nota: É necessária a uniformização de unidades.

(Ver fig.8)

(*) Dr. R. M. Barbosa- docente pesquisador da UNIRP. End.Res.- R.Santa Ernestina 707, Jd. Guarany,13095-320, Campinas, S.P. -Tel(019) 2527048.

(**) Dr. M. L. Lourenço- docente pesquisador da UNIRP. End. Res.- R.São João 2351, Boa Vista, 15010-000, São José do Rio Preto, SP - Tel (017) 2335539.

FIGURAS

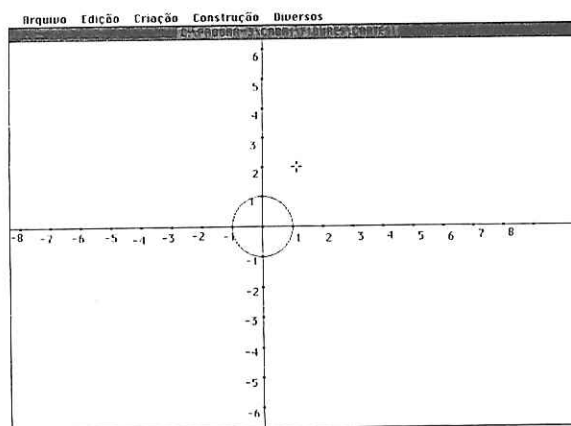


Fig.1

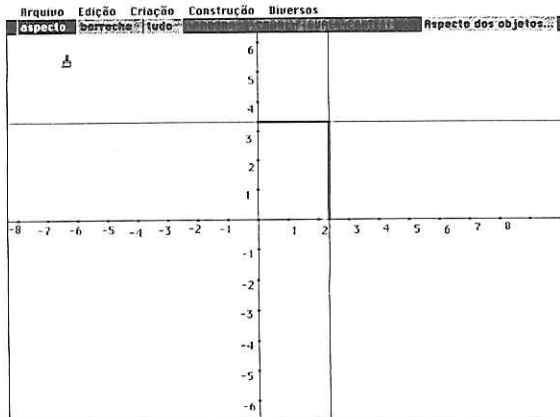
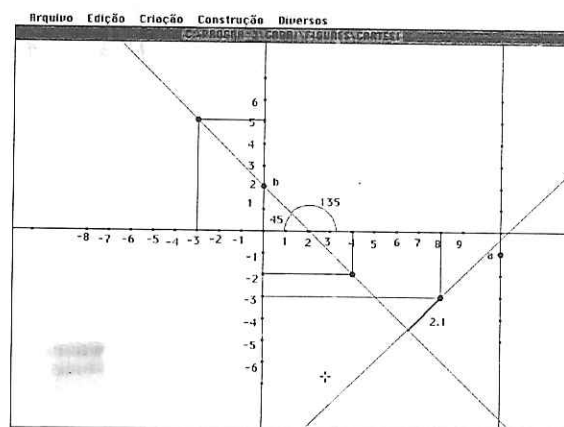
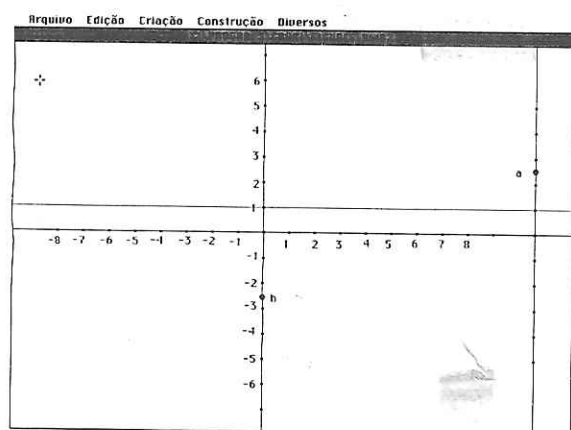
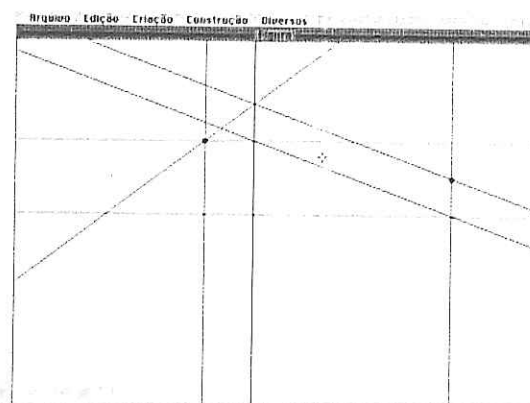
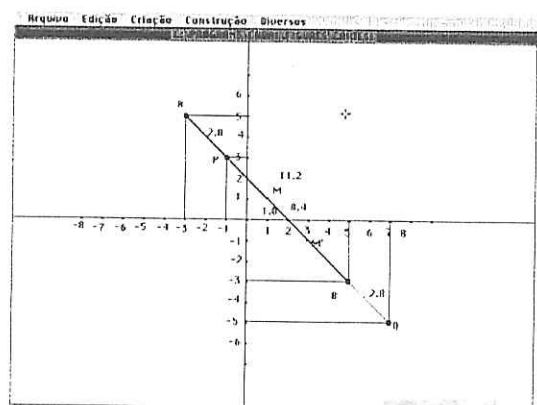
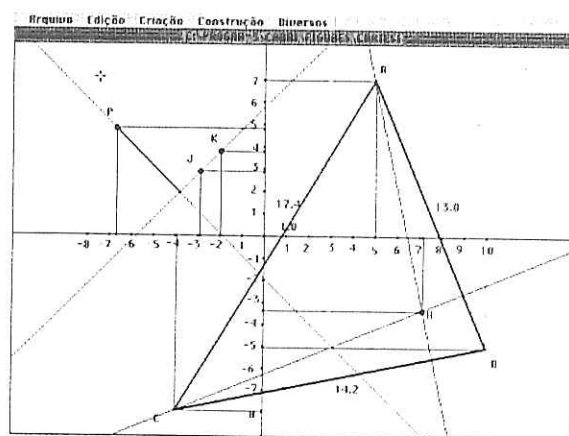
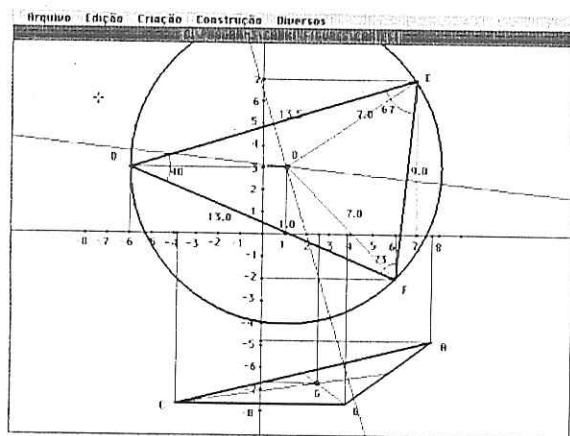


Fig.2



BIBLIOGRAFIA BÁSICA

BARBOSA, R.M. e LOURENÇO, M.L. - CABRI-
géomètre: *Um software educacional adequado à inferência
plausível e credibilidade* (notas de aula, mini curso); V –
EPEM, São José do Rio Preto, SBEM-SP, 1998.

BARBOSA, R.M.- Um curso sobre o CABRI-

géomètre, São José do Rio Preto, UNIRP, 1998.

Manual do Usuário – CABRI-géomètre: *O Caderno Iterativo para ensinar a aprender geometria*; LSD2 / IMAG / UJF / CNRS, Grenoble, Paris (distribuição e tradução PUC – SP), [S.d.]

