



## Tecnologias Digitais e Equação Vetorial da Reta: possibilidades e desafios do *software* GeoGebra

Débora Pelli<sup>1</sup>

Universidade Estadual Paulista – UNESP

Fernando de Carvalho Pires<sup>2</sup>

Universidade Estadual Paulista – UNESP

### RESUMO

O objetivo deste artigo é analisar algumas possibilidades e desafios do uso do *software GeoGebra*, nos processos de ensino e de aprendizagem de conceitos relacionados à Álgebra Linear, especificamente as noções de Equação Vetorial da Reta, desenvolvidas num curso de Pós-Graduação durante o período de calamidade pública ocasionado pela pandemia da Covid-19. Na execução da pesquisa, os dados foram produzidos com alguns participantes do componente curricular de Álgebra Linear, oferecido pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus de Rio Claro, no segundo semestre do ano de 2020. Este estudo insere-se no paradigma qualitativo de pesquisa, cujo desenvolvimento metodológico partiu da Observação Participante. Os instrumentos de produção dos dados, por sua vez, se constituíram de Questionário e de Registro Audiovisual, cujo contexto de obtenção ocorreu em um Seminário Avaliativo no âmbito do componente curricular tomado como referência. Durante a realização deste Seminário, utilizamos o *software GeoGebra* para apresentar os conceitos e desenvolver as atividades inerentes ao tema abordado, no intuito de observar o processo de visualização, construção e exploração desses conceitos. Para a análise dos dados, apoiamos-nos na perspectiva epistemológica associada à Teoria da Atividade e ao Construto Seres-Humanos-Com-Mídias. Os resultados indicam que a utilização do *GeoGebra* nas práticas educativas relacionadas à Equação Vetorial da Reta pode potencializar a aprendizagem de conceitos abstratos e desenvolver habilidades cognitivas de visualização, construção e exploração.

**Palavras-chave:** Álgebra Linear; Geometria Analítica; Software GeoGebra; Seres-Humanos-com-Mídias; Observação Participante.

## Digital Technologies and Vector Equation of the Line: possibilities and challenges of GeoGebra software

### ABSTRACT

This paper studies some possibilities and challenges on usage of GeoGebra software, while teaching and learning processes related to Linear Algebra, specifically as Vector Equation of the Line's notion, defined in a Graduate course during the period of calamity public service caused by the Covid-19 pandemic. In the execution of the data, some participants of the Linear research component of the research used data from the Graduate Program of the Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus de Rio Claro, on second semester

---

**Submetido em:** 04/01/2023

**Aceito em:** 12/07/2023

**Publicado em:** 17/08/2023

<sup>1</sup> Doutoranda em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), campus de Rio Claro (SP); Mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP (MG); Matemática na Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri – UFVJM, campus de Diamantina (MG). d.pelli@unesp.br

<sup>2</sup> Doutorando em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), campus de Rio Claro (SP); Mestre em Educação pela Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri – UFVJM, campus de Diamantina (MG); Professor da Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais (SEE/MG) e da Universidade do Estado da Bahia (UNEB). fernando.carvalho3108@gmail.com

of 2020. This study is part of the qualitative research paradigm, whose methodological development came from Participant Observation. The data production instruments, in turn, consisted of a Questionnaire and Audiovisual, whose production context was carried out in an Active Seminar in the Registration of the curricular component turned as. During this Seminar, we have used the GeoGebra software to present the concepts and activities inherent to the theme, without the intention of observing the process of visualization, construction and use of these concepts. For an analysis of the data, we rely on the epistemological perspective associated with the Activity Theory and the Construct Human Beings-With-Media. The results indicate that the usage of GeoGebra in educational practices related to the Vector Equation of the Line can enhance the learning of abstract concepts and develop cognitive skills of visualization, construction and exploration.

**Keywords:** Linear Algebra; Analytical Geometry; GeoGebra software; Human-Beings-With-Media; Participant Observation

## **Tecnologías Digitales y Ecuación Vectorial de Línea Recta: posibilidades y desafíos del software GeoGebra**

### **RESUMEN**

Este artículo estudia algunas posibilidades y desafíos del uso del software GeoGebra, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos relacionados con el Álgebra Lineal, específicamente como nociones de Ecuación Vectorial de la Línea, definidas en un curso de Posgrado durante el período de servicio público de calamidad ocasionado por la pandemia del Covid-19. En la ejecución de los datos, algunos participantes del componente de investigación Lineal de la investigación utilizaron datos del Programa de Posgrado de la Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus de Rio Claro, en el semestre de 2020. Este estudio es parte de la investigación cualitativa. paradigma de investigación, cuyo desarrollo metodológico partió de la Observación Participante. Los instrumentos de producción de datos, a su vez, consistieron en un Cuestionario y un Audiovisual, cuyo contexto de producción se llevó a cabo en un Seminario Activo en el Registro del componente curricular convertido como. Durante este Seminario, utilizamos el software GeoGebra para presentar los conceptos y actividades inherentes al tema, sin la intención de observar el proceso de visualización, construcción y uso de estos conceptos. Para un análisis de los datos, nos apoyamos en la perspectiva epistemológica asociada a la Teoría de la Actividad y al Constructo Seres Humanos-Con-Medios. Los resultados indican que el uso de GeoGebra en prácticas educativas relacionadas con la Ecuación Vectorial de la Línea puede potenciar el aprendizaje de conceptos abstractos y desarrollar habilidades cognitivas de visualización, construcción y exploración.

**Palabras clave:** Álgebra lineal; Geometría analítica; software GeoGebra; Seres-humanos-con-medios; Observación del participante.

### **CONTEXTUALIZAÇÃO DO FENÔMENO DA PESQUISA**

No ano de 2020, o mundo sucumbiu a uma das maiores crises sanitárias já registradas pela humanidade. Uma infecção virótica, surgida no final de 2019, se alastrou a partir de uma cidade da China e alcançou proporções gigantescas nos demais países, ultrapassando barreiras numa velocidade recorde.

Denominada de Covid-19, a doença infectou e levou à morte milhões de pessoas. As autoridades sanitárias não hesitaram em agir para conter o avanço do vírus e, na tentativa de impedir mortes em larga escala, tomaram medidas de austeridade que culminou, dentre outras, no distanciamento social entre as pessoas.

Uma das consequências da política do distanciamento social foi a suspensão das aulas presenciais, o que incluiu as atividades acadêmicas da Universidade Estadual Paulista

(UNESP). Depois de uma pequena interrupção, a Universidade retornou às atividades acadêmicas de forma remota. Os trabalhos remotos, a propósito, consistem em atividades realizadas, preferencialmente, na residência dos acadêmicos e a interação com os professores e os demais colegas ocorre virtualmente, através de diferentes plataformas digitais, tais como o *Google Meet* e o *Google Classroom*.

Diante desse cenário, as tecnologias digitais tiveram uma atuação-chave na continuidade das atividades acadêmicas, possibilitando, dentre outras coisas, as interações nos ambientes virtuais de aprendizagem, posto que, como já vem sendo discutida há algum tempo por diversos pesquisadores, elas podem oferecer, ao professor, novas práticas e alternativas didáticas para serem trabalhadas em suas aulas, sendo elas presencial, on-line ou remotas. Neste sentido,

A presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) no nosso dia a dia cria novas possibilidades de expressão e comunicação, gerando novas possibilidades pedagógicas. As TDIC têm facilitado o trabalho com imagens e animações, o que resulta em alternativas para a representação linear e sequencial da escrita (VALENTE, 2013, p. 113).

Para Valente (2013), as tecnologias digitais podem potencializar e enriquecer as dinâmicas desenvolvidas nas aulas de Matemática, uma vez que tais recursos apresentam grandes subsídios às práticas desenvolvidas nos processos de ensino e aprendizagem. Entre os diversos recursos tecnológicos oferecidos, e que vem sendo usado nesses momentos das aulas remotas, destaca-se o *GeoGebra*. Esse *software* tem se popularizado nos últimos anos devido às diversas vantagens que desenvolvem no raciocínio lógico dos sujeitos, concedendo aos alunos o papel ativo na construção do seu próprio conhecimento. Várias são as pesquisas desenvolvidas sobre as possibilidades do uso do *GeoGebra* como estratégia de ensino e aprendizagem da Matemática (BAIRRAL, 2015b; BORTOLOSSI, 2016; REZENDE, 2016). O *GeoGebra* é um software livre e gratuito de Matemática dinâmica criado por Markus Hohenwarter, que permite desenvolver, em um laboratório de informática, conceitos matemáticos da Álgebra e da Geometria, por exemplo, mas é extensível a outros ramos da Matemática.

Em meio ao contexto de expansão das aulas remotas, vários questionamentos nos inquietaram, dos quais um se tornou central: quais as possibilidades e desafios do uso do *software GeoGebra* no processo de ensino e de aprendizagem de Equação Vetorial da Reta, em um curso de Pós-Graduação, em situação decretada de pandemia?

Partindo da história da Matemática, identificamos diversas contribuições para o desenvolvimento do domínio científico da Álgebra Linear. O que conhecemos hoje sobre esse importante campo do saber matemático é resultado do esforço de pesquisas direcionadas em conhecer, entender e solucionar situações diversas.

### **Conhecendo um pouco sobre Equação da Reta**

A reta, como ente geométrico, pode ser compreendida a partir de várias perspectivas. Para nossa investigação, fizemos um recorte dessas possibilidades epistemológicas e assumimos a perspectiva algébrica, com tratamento vetorial.

Steinbruch e Winterle (1987) consideram que uma reta pode ser representada de várias formas, mas que algebricamente requer elementos fundamentais para a sua determinação. Nesse sentido, de acordo com os autores, uma reta pode ser determinada a partir de sua equação algébrica, contando com um ponto qualquer pertencente a ela e um vetor que direcione sua posição. Na perspectiva desses autores, a reta, em sua forma vetorial, é representada genericamente pela expressão  $P = A + tv$ , onde  $P$  e  $A$  representam pontos da reta,  $t$  representa um valor real qualquer e  $v$  representa o vetor diretor dessa reta.

O estudo dos conceitos da Equação Vetorial da Reta é de extrema relevância para fenômenos da Física e de outros campos do conhecimento, em que o elemento “direção” configura aspecto central de ocorrência desses mesmos fenômenos.

Sendo assim, esse artigo tem como objetivo analisar quais as possibilidades e desafios do uso do software *GeoGebra* no processo de ensino e na aprendizagem de Equação Vetorial da Reta, em um curso de Pós-Graduação, em situação decretada de pandemia. Para tanto, a pesquisa foi realizada com os alunos de pós-graduação, em nível de mestrado e doutorado, durante o desenvolvimento da disciplina de Álgebra Linear, oferecido pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM), da Universidade Estadual Paulista (UNESP) – Rio Claro – SP.

Este estudo insere-se no paradigma qualitativo de pesquisa que, de acordo com Araújo e Borba (2017), busca compreender e interpretar dados e discursos de diferentes naturezas, mesmo quando envolverem grupos de participantes. A metodologia empregada foi a de Observação Participante. Os instrumentos de produção dos dados utilizados foram o Questionário e o Registro Audiovisual. Os dados foram analisados sobre a perspectiva

teórica da Teoria da Atividade, defendida por Engeström (1987), e da visão epistemológica do Construto Seres-Humanos-Com-Mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Para o alcance do objetivo aqui proposto, este artigo está sistematizado da seguinte forma: inicialmente, na Introdução, apresentamos uma breve discussão sobre as aulas remotas durante a situação decretada de pandemia, abordando alguns aspectos sobre os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática com o uso das tecnologias digitais; na seção seguinte, apresentamos o Referencial Teórico; na terceira seção, apresentamos a Metodologia, bem como os instrumentos de produção dos dados adotados; em seguida, apresentamos a Análise dos Dados; e, por fim, tecemos nossas Considerações Finais.

## **BASES TEÓRICAS DA PESQUISA**

Nossa escolha pela perspectiva teórica da Teoria da Atividade e do Construto Seres-Humanos-Com-Mídias se deu por considerarmos que ambas as correntes dialogam entre si e possuem conexões com a Metodologia adotada nesta pesquisa. Araújo e Borba (2017) consideram essencial que, em uma investigação importante, haja coerência e a harmonia entre os elementos estruturais, ou seja, a Metodologia, o Referencial Teórico e a Visão Epistemológica dos Pesquisadores.

### **Teoria da Atividade**

A Teoria da Atividade tem sua origem na Psicologia, especificamente nos trabalhos de Vygotsky e de seus seguidores, Leontyev e Luria, em um esforço pela construção de uma Psicologia Sócio-histórico-cultural, fundamentada na filosofia marxista. De uma forma muito geral de descrição, esses autores procuram analisar o desenvolvimento da consciência na atividade social prática, tendo como preocupação os impactos psicológicos da atividade e as condições sociais e sistemas que são produzidos em tal atividade e por meio dela. (DANIELS, 2011).

Durante seu desenvolvimento, a Teoria da Atividade recebeu influências de distintas (três até o momento) gerações. A primeira geração foi marcada pelo conceito de mediação, introduzido por Vygotsky. De acordo com essa concepção, a atividade humana é caracterizada por três elementos-chave: o sujeito – protagonista da atividade; o objeto – a força motivadora; e os artefatos – mediadores da relação entre sujeito e objeto.

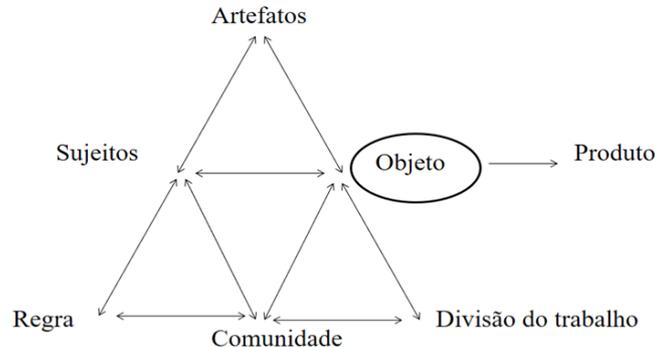
A segunda geração é protagonizada por Leontiev e Lúria, que se valeram profundamente do conceito de mediação e compreenderam a atividade como uma estrutura

complexa, composta de ações e operações, sendo, portanto, necessário analisá-la sob o ponto de vista coletivo (CUNHA, 2018). Para Leontiev (1978, p. 68), “[...] por atividade, designamos os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo “.

Na terceira geração, sobre a qual nos apoiamos para a produção deste artigo, os fundamentos teóricos são inspirados nas ideias discutidas por Engeström (1987), com base nos estudos de Leontiev e Luria. O autor defende o estudo de ferramentas e artefatos como componentes do funcionamento humano integrais e inseparáveis e sustenta que o foco do estudo da mediação deveria ser na relação com outros componentes de um sistema de atividade (DANIELS, 2011).

Engeström (1987) criou um diagrama para representar um sistema de atividade, por meio dos elementos: artefatos, sujeito, comunidade, regras, divisão do trabalho e objeto. É considerado o primeiro de cinco princípios que esse autor propõe para discutir suas ideias, ou seja, a unidade mínima de análise, como pode ser observado na Figura 1 a seguir.

**Figura 1** – Representação do sistema de atividade humana.



**Fonte:** Engeström (1987, p. 78)

Na organização sistêmica, apresentada na Figura 1, todos os seis elementos que a compõem formam uma unidade que se constitui de forma coletiva e é marcada por relações mediadas. Souto e Araújo (2013) explicam:

Nessa representação, a relação entre sujeito e objeto é mediada, também, pela comunidade, ou seja, não apenas os artefatos medeiam essa relação. A mediação entre sujeito e objeto, pela comunidade, é representada pelo triângulo que une esses três elementos. A relação entre sujeito e comunidade, por sua vez, é mediada pelas regras e representada [...] pelo respectivo triângulo. Finalmente, a relação entre comunidade e objeto é mediada pela divisão do trabalho. O triângulo, que

tem por vértices a comunidade, a divisão do trabalho e o objeto representa essa mediação. Como resultado o objeto, entendido como “a ‘matéria-prima’ ou ‘espaço-problema’ para qual a atividade é direcionada” (ENGESTROM, SANNINO, 2010, p. 6), é transformado no produto da atividade (SOUTO; ARAÚJO, 2013).

Engeström (1987) considera que a compreensão das ações individuais só é possível se houver a concepção de que o objeto da atividade está em constante relacionamento com sujeito, objeto e artefatos, e com os mediadores sociais. Os sujeitos são os indivíduos cujo poder de ação é tomado como ponto de vista na análise (Figura 2).

O objeto deve ser entendido como a “matéria-prima” ou “espaço problema” para o qual a atividade é direcionada e que é transformado em produto. O objeto é mostrado com a ajuda de uma figura oval, indicando que ações orientadas para o objeto são sempre, explícita ou implicitamente, caracterizadas por ambiguidade, surpresa, interpretação, busca de sentido e potencial para mudanças (DANIELS, 2011).

A comunidade abrange todos que compartilham o mesmo objeto. A divisão do trabalho refere-se à distribuição de tarefas entre os indivíduos da comunidade. As regras são os regulamentos, as normas e convenções que regulam o sistema (COSTA, 2017). Por conseguinte, os demais princípios são: multivocalidade, (segundo princípio), a historicidade (terceiro princípio), as contradições internas (quarto princípio) e as transformações (ou aprendizagem) expansivas (quinto princípio).

A multivocalidade, (segundo princípio), segundo Engeström (2001), consiste num sistema de atividade que possui vozes múltiplas, ou seja, ele é formado por uma comunidade na qual os sujeitos têm múltiplos pontos de vista, tradições, crenças e interesses. Os indivíduos têm culturas, crenças e opiniões próprias mutuamente compartilhadas no sistema (COSTA, 2017). A divisão do trabalho em uma atividade cria posições diferentes para os participantes, através da qual eles e os artefatos empregados carregam consigo sua história, regras e convenções. Essas vozes múltiplas podem ser tanto uma fonte de problemas, quanto uma fonte de inovação, exigindo ações de acordo e negociação (DANIELS, 2011).

A historicidade (terceiro princípio), é o que destaca que todo o sistema de atividade deve ser analisado do ponto de vista de seu desenvolvimento ao longo do tempo (da história). Dessa forma, todos os problemas e as possibilidades só podem ser compreendidos por meio dela. Para Souto (2013), “qualquer que seja o sistema de atividade, ele deve ser visto à luz

da sua história, pois é construído e transformado de forma irregular ao longo do tempo” (SOUTO, 2013, p. 26).

Engeström (1987) divide as contradições internas em quatro níveis, sendo: primária, secundária, terciária e quaternária. A contradição primária ocorre no interior de cada elemento que constitui o sistema de atividade. Já as contradições secundárias, que ocorrem quando um novo artefato é introduzido no sistema de atividade, produzem resistência dos sujeitos por estarem eles acostumados ao uso de um antigo artefato. A contradição terciária, por sua vez, pode se estabelecer entre algo novo que é proposto e que rompe com o que é considerado padrão dominante. Por fim, na contradição quaternária, surge entre o sistema de atividade e outros sistemas interligados.

De acordo com Engeström (1987), a contradição entre valor de uso e valor de troca, característica das mercadorias, está presente em todos os elementos de um sistema de atividade. Distúrbios, dilemas e conflitos são manifestações das contradições, e cada atividade vivencia contradições de diferentes maneiras. Contradições são consideradas a força motriz de transformação, favorecendo a tornar o objeto em movimento (COSTA, 2017).

As transformações (ou aprendizagens) expansivas (quinto princípio) visam superar uma contradição que leva a atividade a uma situação de crise. A expansão do objeto exige um modo de compreender as contradições internas do sistema, e de encontrar possibilidades de continuar a desenvolvê-lo. Para captar a sua essência, o sujeito precisa compreender a lógica do seu desenvolvimento, e isso é possível através da análise de sua formação histórica, das contradições existentes nos ambientes organizacionais e das formas de superação/resolução dessas contradições. (DANIELS, 2011).

### **Construto Seres-Humanos-Com-Mídias**

Essa base teórica, o construto seres-humanos-com-mídias, foi apresentada e sintetizada por Borba e Villarreal (2005). Ela se sustenta na abordagem da reorganização do pensamento, proposta por Tikhomirov (1981). Ou seja, se sustenta na ideia de que o computador reorganiza o pensamento humano e o ser humano reorganiza o pensamento do computador ciclicamente. Em seus estudos sobre as tecnologias da inteligência (LÉVY, 1993) – oralidade, escrita e informática - Lévy (1993) defende a constituição de um coletivo pensante homem-coisas (SOUTO, 2013).

Este constructo visa enfatizar que o pensamento humano e o ser humano necessitam de tecnologias, tais como a oralidade, a escrita e a informática. Esses elementos são compreendidos como meios para expressar e registrar seu conhecimento, isto é, a produção de conhecimento é realizada por coletivos formados por atores humanos e não humanos.

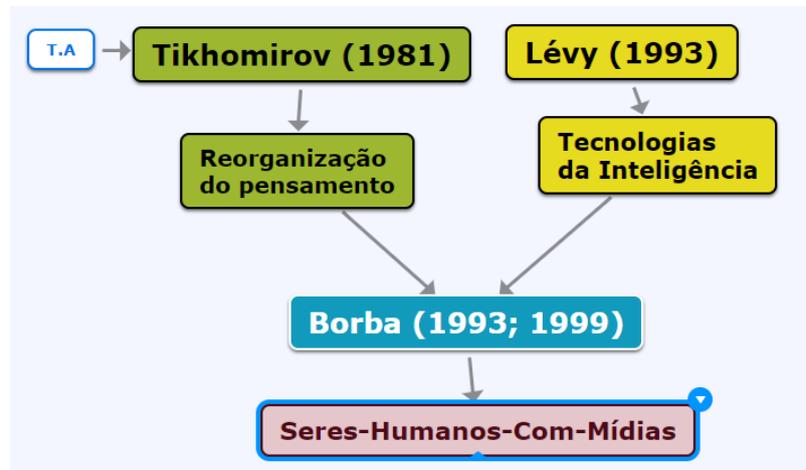
Essa noção de Seres-Humanos-com-mídias, defendida por Borba e Villarreal (2005), realça o papel das tecnologias da inteligência na produção de conhecimento. Ao produzir conhecimento, sempre estamos em interação com humanos e com uma mídia disponível, seja ela a oralidade, a escrita ou a multimídia. Essas tecnologias da inteligência não são apenas coadjuvantes ou mediadoras que são externas ao ser humano: elas permeiam o ser humano. (DOMINGUES, 2014, p. 18)

Segundo esse autor, o conhecimento não é produzido somente pelo humano, mas por um coletivo de seres-humanos-com-mídias.

Com relação às raízes do Construto Seres-Humanos-com-Mídias, é importante destacar os estudos desenvolvidos por Tikhomirov (1981). Para esse autor, os computadores podem afetar a cognição humana e, conseqüentemente, a presença do computador pode influenciar a Educação. Tikhomirov (1981) rejeita a ideia de que os computadores vão substituir os seres humanos. Segundo ele, embora os resultados obtidos por computadores e humanos possam ser equivalentes mediante determinadas tarefas, os processos pelos quais a tarefa é executada tendem a divergir.

Lévy (1993) argumenta que, todos os que sugerem que essas novas tecnologias são perigosas para a humanidade, não se dão conta de que o meio, ou mídia, pelo qual se expressam – que pode ser a oralidade ou a escrita – também são meios que estruturam suas práticas. E como não percebem a relação de interface que se estabelece entre eles próprios, enquanto atores sociais, e esses inofensivos meios de expressão, acreditam que a cognição se realiza de maneira independente da mídia.

Para sistematizar as ideias do Construto Seres-Humanos-com-Mídias, Costa (2017) apresenta uma figura a seguir:

**Figura 2** – Mapa conceitual sobre o Construto Seres-Humanos-com-Mídias.

Fonte: Costa (2017, p. 30)

Na figura 2, Costa (2017) apresenta um mapa conceitual, os autores e as ideias que serviram como base para Borba e Villarreal (2005) compor o Construto Seres-Humanos-com-Mídias. De um lado, temos Tikhomirov (1981), que considera da Teoria da Atividade a ideia de mediação, implícita no conceito de reorganização do pensamento e presente nos processos de interação dos seres humanos e não humanos. Para ele, uma mídia não substitui ou se sobrepõe à outra.

De outro lado, Lévy (1993) mostra as tecnologias da inteligência (a oralidade, escrita e a informática). Para Lévy (1993), as mídias sempre estiveram relacionadas ao desenvolvimento da humanidade ao longo da história das sociedades. Segundo ele, as mídias oralidade, escrita e a informática são as três principais maneiras pelas quais os seres humanos estendem a memória e o pensamento.

Além disso, Borba e Villarreal (2005) apresentam a ideia de experimentação com tecnologias, onde seres humanos em conjunto com as mídias digitais produzem conhecimentos a partir de uma reorganização no pensamento. Segundo esses autores a abordagem experimental em Educação Matemática relaciona-se com:

[...] o uso de procedimentos experimentais e tentativas educadas que apoiam a geração de conjecturas matemáticas; a descoberta de resultados matemáticos até então desconhecidos do experimentador; a possibilidade de testar formas alternativas de obter um resultado; a chance de propor novos experimentos; uma maneira diferente de aprender matemática” (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 89, tradução nossa).

Quando as tecnologias digitais passam a fazer parte dessa experimentação com tecnologias, a possibilidade de exemplos amplia e a realização de feedbacks torna-se rápida.

## ASPECTOS METODOLÓGICOS UTILIZADOS NA PESQUISA

Neste artigo, apoiamos no paradigma qualitativo de pesquisa (BOGDAN; BIKLEN, 1994), pois nosso objetivo é analisar algumas possibilidades e desafios do uso do *GeoGebra* no ensino e na aprendizagem de Álgebra Linear, em especial no estudo da Equação Vetorial da Reta, em um curso de Pós-Graduação, em época de pandemia.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), as investigações qualitativas consistem num tipo de pesquisa que apresenta um forte cunho descritivo, caracterizando e detalhando as particularidades do fenômeno estudado. É uma abordagem que valoriza a exploração de toda a riqueza de informações inerentes ao objeto de estudo, sem deixar de apresentar aspectos entendidos como triviais. (Bodgan e Biklen, 1994)

Dessa forma, os investigadores qualitativos abordam o mundo de forma minuciosa. Além disso, esse tipo de pesquisa estuda um grupo particular no seu contexto real, podendo ter propósitos distintos e utilizar uma grande variedade de instrumentos para a produção de dados. Para o caso particular desta pesquisa, serão utilizados os seguintes instrumentos de produção dos dados: o questionário e o registro audiovisual.

A Observação Participante, que consiste na metodologia aqui empregada, segundo Jaccoud e Mayer (2008), tem a vantagem de levar a uma compreensão mais profunda da realidade social e se mostra como um método que reduz a distância entre os discursos e as práticas concretas dos atores sociais. Os autores deste artigo participaram como discentes da disciplina e realizaram suas observações nos excertos das falas dos demais discentes.

Gil (2016) considera o questionário como

[...] a técnica de investigar composta por um conjunto de questões que são submetidas a pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores, interesses, expectativas, aspirações, temores, comportamentos presentes ou passado etc. (GIL, 2016, p. 121)

Para tanto, elaboramos um questionário utilizando a plataforma digital *Google Forms*. O questionário foi planejado para contemplar todos os participantes da pesquisa, elaborado de forma clara e que não dispusesse de muito tempo para ser respondido, focando no objetivo da investigação. A partir do retorno dos questionários respondidos realizamos uma análise e uma interpretação mais completa do fenômeno investigado.

Outro instrumento de produção dos dados utilizado foi o registro audiovisual, que possibilita aos pesquisadores gravar as interações e reflexões realizadas entre os sujeitos da pesquisa. Powell e Silva (2015) argumentam que os registros audiovisuais, como os vídeos, fotos e áudios, possibilitam registrar expressões, comportamentos e interações entre os participantes da pesquisa, além de poder ser revistos quantas vezes forem necessárias. Dessa forma, durante as aulas remotas, a professora, com o consentimento dos discentes, utilizou a função de gravação do *Google Meet* para registrar as aulas, o que possibilitou o apontamento dos diálogos, das expressões e das interações dos participantes durante as aulas.

Os dados desta pesquisa foram produzidos com base nas respostas dos discentes, ao responderem o questionário. Salientamos que todos os discentes participantes desta pesquisa são acadêmicos regulares do Programa. Esta disciplina faz parte do currículo do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP. A disciplina, a propósito, foi ministrada totalmente na modalidade remota, por meio da plataforma *Google Meet*, não havendo encontros presenciais.

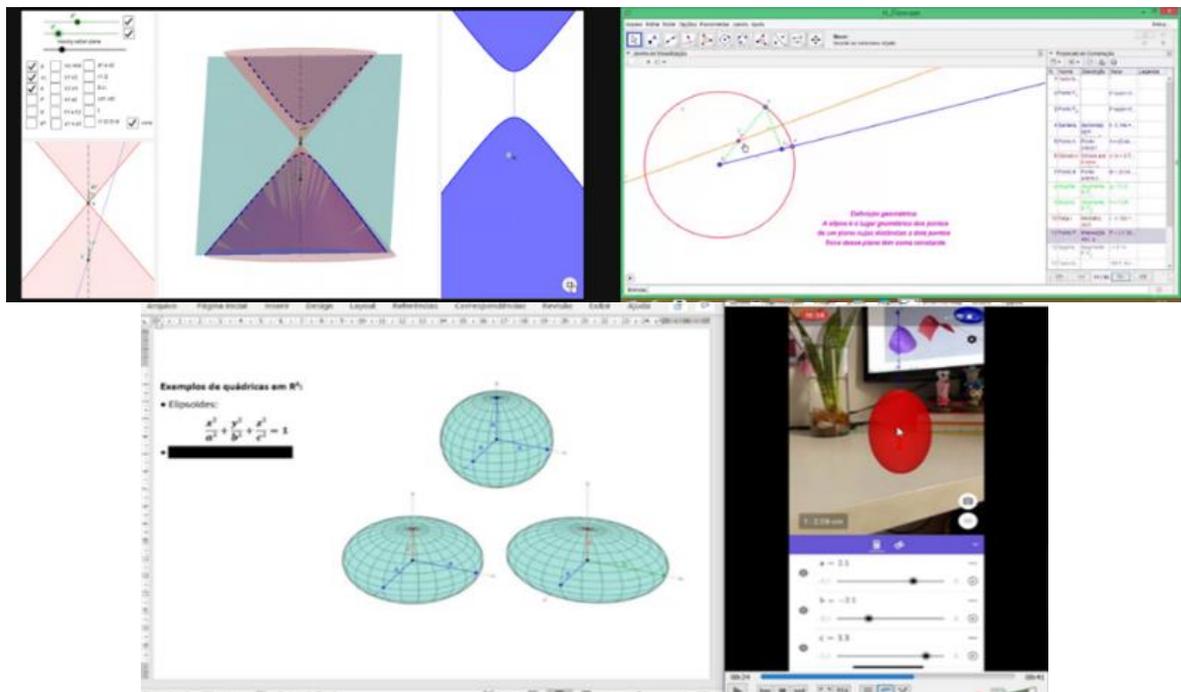
Isso posto, apresentamos, na próxima seção, a análise dos dados

## **ANÁLISE DOS DADOS: EM BUSCA DE COMPREENSÕES DO FENÔMENO INVESTIGADO**

Nesta seção, buscamos apresentar os dados produzidos, relacionando os diálogos dos participantes com as experiências vivenciadas por eles, em conjunto com nossas observações. Essa articulação metodológica visa a evidenciar as possibilidades e os desafios do uso das tecnologias digitais, em especial o *GeoGebra*, no processo de ensino e aprendizagem da Álgebra Linear, com foco nas definições e conceitos relacionados à Equação Vetorial da Reta. Ressaltamos que os dados foram obtidos em decorrência de um Seminário Avaliativo elaborado e apresentado pelos autores.

No transcorrer das apresentações dos Seminários Avaliativos dos diversos grupos que abordaram outros conceitos da Álgebra Linear, identificamos que todos eles utilizaram, de algum modo, o software *GeoGebra* para o processo de construção, visualização, exploração e heurística, de modo a interagir com os demais grupos. A Figura 3 apresenta alguns momentos dessas interações advindas de uma forma coletiva marcada por relações mediadas pelo artefato *GeoGebra*, neste caso.

**Figura 3** – O uso do *GeoGebra* nas Apresentações dos Seminários Avaliativos de Álgebra Linear.



**Fonte:** Elaborado pelos autores (2020)

Nessa figura, observamos a apresentação de conceitos da Álgebra Linear abordados pelos demais grupos, como, por exemplo, as Cônicas (elipses, hipérboles e parábolas), utilizando a realidade aumentada, possibilitada pelo aplicativo “Calculadora 3D, do *GeoGebra*”.

A utilização das tecnologias digitais pode contribuir para o rompimento do modelo usual de ensino e de aprendizagem de conceitos abordados quase que exclusivamente por meio de linguagem algébrica e simbólica, o que pode dificultar a visualização e a construção ativa do conhecimento matemático, ou seja, houve experimentação com tecnologias (BORBA, VILLARREAL, 2005). Nas narrativas a seguir, os participantes evidenciaram a relevância do uso do software *GeoGebra* para o desenvolvimento do ensino e aprendizagem da Álgebra Linear.

**Participante A:** *Sim, possibilita uma melhor visualização para compreender os conceitos abordados.*

**Participante C:** *Sim, pois através dele é possível realizar muitas construções e visualizações*

**Participante F:** *Sim. O GeoGebra auxilia na visualização de alguns assuntos, além de possibilitar interatividade.*

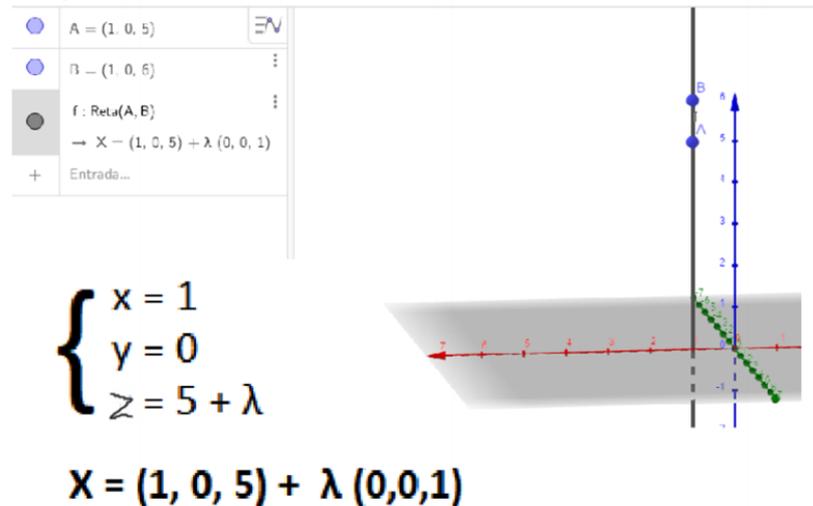
**Participante L:** *Sim, é relevante! Interação com Objetos - @ estudante tem condições de manipular as figuras, ter contato com seus elementos, visualizar suas características, além da visualização, ao mesmo tempo, geométrica e algébrica.*

As tecnologias digitais possibilitam, dentre outras coisas, construir conceitos, fazer Matemática, investigar e significar soluções numéricas (COSTA, 2017). No caso do *GeoGebra*, como destacado pelos participantes A, C, F, e L, há o favorecimento da visualização e construção dos conceitos propostos. Borba e Villarreal (2005) discutem os *feedbacks* proporcionados pelas mídias em seus aspectos visuais, ressaltando a importância desses processos no desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes. Nesse sentido, esses pesquisadores consideram que

- A visualização constitui um meio de acesso alternativo ao conhecimento matemático;
- A compreensão de conceitos matemáticos, requer múltiplas representações, e representações visuais podem transformar o entendimento deles;
- A visualização é parte da atividade matemática e uma maneira de resolver problemas. (BORBA e VILLAREAL, 2005, p.96)

Assim sendo, acreditamos que a utilização das tecnologias digitais, em especial o *GeoGebra*, durante as aulas e na realização de atividades de Álgebra Linear (Equação Vetorial da Reta) favorece a visualização, o processo de construção e o recebimento de *feedbacks*, os quais, em conjunto, podem contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem.

Em se tratando da Equação Vetorial da Reta, foco do nosso artigo, optamos pelo uso do software *GeoGebra* na realização do Seminário Avaliativo e na proposição das questões das atividades. Em relação à questão “Represente, no *software GeoGebra*, uma equação da reta em que uma só das componentes de um vetor com três componentes é nula, ou seja, que seja ortogonal a um dos eixos coordenados e, portanto, a reta  $r$ , é paralela ao plano dos outros eixos” proposta na apresentação do Seminário Avaliativo, e cujo tema é Equação Vetorial da Reta, a figura 4 traz a resposta estabelecida por um dos grupos.

**Figura 4** – Representação, no *GeoGebra*, da atividade proposta**Grupo 2 Jam de tarefa**

**Fonte:** Elaborado pelos autores (2020)

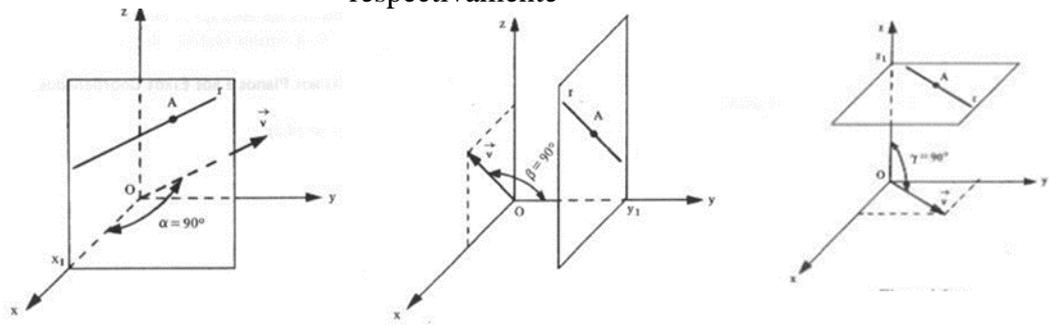
Os alunos utilizaram a ferramenta Google jamboard, que pode ser considerada um quadro negro virtual com recorte do trabalho realizado no GeoGebra, para expor em sala de aula virtual. Pela resposta apresentada, percebemos que o grupo compreendeu que o uso dos pontos A e B, para os quais escolheram valores arbitrários das suas componentes, levam em consideração que uma dessas componentes seja nula. Dessa forma, de maneira correta, os integrantes do grupo construíram a reta ortogonal a um eixo e paralela ao plano dos outros eixos. Para realizar essa construção, o grupo mobilizou os seguintes conceitos, apresentados no Seminário Avaliativo: Retas Paralelas aos Planos e aos Eixos Coordenados quando uma das Componentes do Vetor  $\vec{v} = (a, b, c)$  é nula, o que pode acontecer quando  $a$ ,  $b$  ou  $c$  for igual a zero.

Como já sinalizado por Souto (2014) as transformações expansivas são “movimentações em um sistema de atividade em que seres humanos com mídias buscam um modo que não havia sido em outras situações pensadas por eles para compreender/reconstruir entendimentos sobre um problema ou conteúdo matemático”. O que vemos aqui são exemplos de transformações expansivas para a resolução de questões.

Se  $a = 0$ , tem-se as equações das retas:  $\{x = x_1, y - y_1 = z - z_1\}$ , onde  $y$  e  $z$  variam e  $x = x_1$  é constante, da qual decorre que a reta se encontra paralela a um plano coordenado  $yOz$ . Em raciocínios análogos, se  $b = 0$ , tem-se as equações das retas  $\{y = y_1, x - x_1 = z - z_1\}$  onde  $x$  e  $z$  variam e  $y = y_1$  é constante, e a reta se encontra

paralela a um plano  $xOz$ . Por fim, se  $c = 0$ , tem-se as equações das retas:  $\{z = z_1, x - x_1a = y - y_1b$  onde  $x$  e  $y$  variam e  $z = z_1$  é constante, e a reta se encontra paralela a um plano  $xOy$ . A Figura 5 representa cada uma das situações expostas e na ordem que foram descritas aqui.

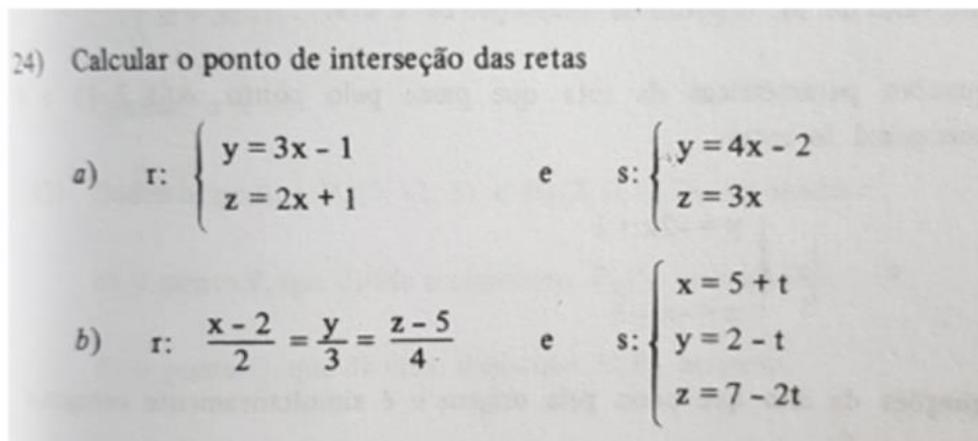
**Figura 5** – Representação das equações das retas com  $a = 0, b = 0$  e  $c = 0$ , respectivamente



Fonte: Steinbruch; Winterle (1987)

Outra questão proposta durante a realização do Seminário Avaliativo abordou o conceito de Intersecção entre Retas. A figura 6 apresenta a questão.

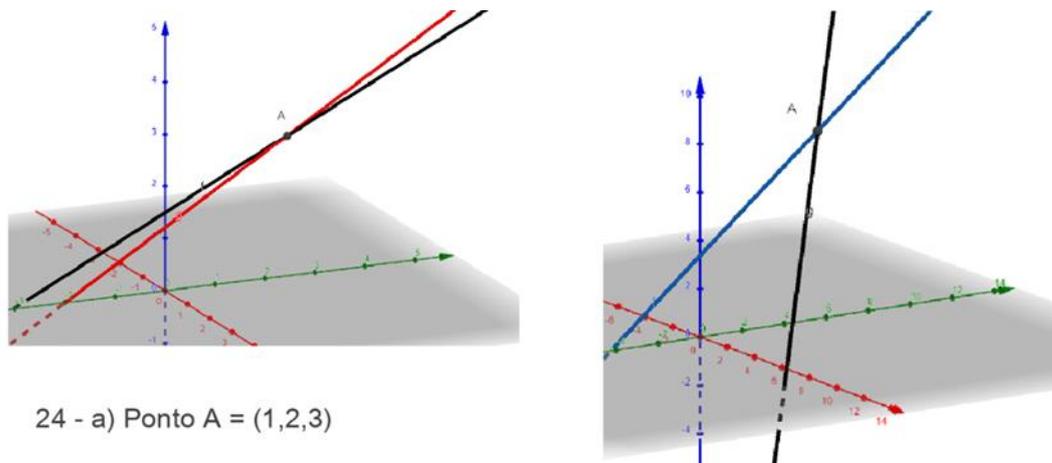
**Figura 6** – Questão proposta



Fonte: Steinbruch; Winterle (1987)

No decorrer da realização da atividade, o Grupo demonstrou quais as estratégias utilizadas para construir as retas no conjunto de coordenadas e determinar os pontos de intersecção entre elas, a partir do *software GeoGebra*.

A figura seguinte ilustra a solução obtida pelo Grupo respondente.

**Figura 7** – Resposta dada para a atividade proposta

**Fonte:** Elaborado pelos autores (2020)

Conforme se percebe, na figura, o grupo representou, no plano  $xyz$  de coordenadas, as duas retas apresentadas na questão e, em seguida, construiu outra representação simbolizando a solução obtida, isto é, a resposta é o ponto A, de coordenadas A (4,3,9).

O processo de solução da questão, conforme desenvolvido pelos participantes do grupo, revela que os integrantes seguiram uma estratégia coerente e correta, ao representar graficamente as retas, num primeiro momento, e, logo na sequência, ao representar o ponto de concorrência entre elas. Neste sentido, houve uma busca para a compreensão da atividade (ENGESTRÖM, 1987) do grupo de estudantes a partir das ações que foram desenvolvidas por eles até a produção de uma solução.

Passando para a análise das respostas dos questionários aplicados à turma, vamos desenvolver a interpretação de cada uma das afirmações dadas pelos participantes.

- Você considera que o uso do *GeoGebra* no estudo de conceitos da Equação Vetorial da Reta associa-se ao desenvolvimento das habilidades de: Visualização, construção, exploração, heurística?

Essa questão teve como foco investigar a percepção dos sujeitos quando lidam com *softwares* digitais no processo de aprendizagem de Matemática. Seguem alguns diálogos.

**Participante C:** *Como se trata de Geometria, acredito que o uso do GeoGebra possibilitou aprimorar a visualização das propriedades inerentes ao tema em estudo.*

**Participante F:** *Os estudantes podem construir as retas e visualizar a representação no plano e espaço. Também podem explorar os comandos do software e realizarem outras tarefas.*

**Participante H:** *A visualização é direta, uma característica inerente ao software. Por conta dessa característica, podemos construir figuras, explorar as mudanças ocasionadas pelas*

alterações em alguns parâmetros e, por meio da visualização, entender quais as consequências destas alterações.

**Participante J:** Com a exploração no GeoGebra, podemos "errar" sem nos preocuparmos com críticas ou deboches de colegas, assim podemos visualizar as construções e percebermos outras construções sem ser aquelas dadas pelo professor, vistas como a única solução.

**Participante L:** A autonomia do conhecimento tem sido um dos objetivos da aprendizagem mais discutidos atualmente. Essa característica é muito importante considerando-se a formação da pessoa.

Consideramos que a historicidade, assim como a multivocalidade estão presentes nesta situação levando em conta o período histórico vivido e as diferentes vozes dos participantes da pesquisa.

Seguindo com nossa análise do material empírico, apresentamos a segunda pergunta direcionada aos participantes.

- Ao realizar sua atividade de Equação Vetorial da Reta, utilizando o *GeoGebra*, você identificou se o *software* contribuiu para a compreensão desses conceitos? Quais as estratégias percorridas?

**Participante F:** Acredito que os comandos existentes no *software* auxiliam a construção de retas de maneira imediata, às vezes, sem precisar dominar os conceitos. Se utilizado esses comandos, acredito que não contribui diretamente para a formalização do assunto e compreensão matemática dele.

**Participante G:** O *software* já indica a equação da reta a partir dos pontos, o que facilita. O procedimento deve ser conversado com os alunos, mas ele possibilita verificações e aferições.

**Participante H:** Sim, o *software* contribuiu para a compreensão. O *GeoGebra* permite a representação de pontos e de vetores passando por um ponto. Desta forma, dado um ponto e um vetor, podemos representar a reta que passa por este ponto e tem a direção do vetor dado. O *GeoGebra* tem ferramentas prontas para isso.

Pelas respostas apresentadas, depreendemos que os participantes julgaram a utilização do *GeoGebra* como relevante no processo de ensino e aprendizagem da Equação Vetorial da Reta. Muitos atribuem ao potencial representativo do *software* uma de suas maiores qualidades. Neste sentido, os feedbacks oferecidos pelo *software* otimizaram a aprendizagem dos conceitos de Equação da Reta. Observamos que várias vozes são o combustível para o desenvolvimento da atividade.

A próxima pergunta compôs o rol de questões do questionário aplicado aos participantes do Seminário Avaliativo. Sigamos com sua análise.

- Quando questionado aos participantes da pesquisa se como professor usaria o *software GeoGebra* como um recurso no processo de ensino e aprendizagem de conceitos da Álgebra Linear, as respostas foram positivas, como pode ser observado nas narrativas.

**Participante A:** *Sim, por se tratar de uma proposta em que o aluno consegue construir seu próprio conhecimento, além de possibilitar o trabalho coletivo etc...*

**Participante D:** *Teria que aprofundar mais meus conhecimentos no que diz respeito a utilização do software GeoGebra, mas considero que utilizar as tecnologias ajuda o aluno na visualização dos conceitos.*

**Participante L:** *Sim. Além das características citadas na questão anterior, temos a relevância das demonstrações das propriedades que, no GeoGebra, ficam mais evidentes e deixam de ser, apenas, teóricas.*

**Participante G:** *Eu uso o GeoGebra para tal fim. A visualização para meus alunos é fundamental e considero esse recurso muito simples de utilizar e cheio de possibilidades.*

Podemos observar que, apesar do desafio apresentado, como relatado pelo participante D, quando afirma que “*Teria que aprofundar mais meus conhecimentos no que diz respeito a utilização do software GeoGebra*”, os participantes destacam a importância do uso do *software*, mas deixam claro que o despreparo é um obstáculo a ser superado. Esse desafio muitas vezes está relacionado à falta de uma formação inicial e continuada para os professores, seja no momento da graduação ou em outros espaços após essa etapa escolar, o que pode motivar uma insegurança diante da diversidade de instrumentos tecnológicos digitais disponíveis.

Seguindo com a análise, ainda com relação às narrativas, o Participante G relata que já faz o uso do *GeoGebra*. Isso indica que, apesar de forma “tímida”, os professores têm conseguido utilizar as tecnologias digitais nas aulas. É importante o papel do professor nesse cenário, com Tecnologias Digitais, buscando o desenvolvimento profissional para propiciar um ambiente de aprendizagem em que o sujeito é capaz de construir o próprio conhecimento, conforme explicitado no Construto Seres-Humanos-Com-Mídias (BORBA, VILLARREAL, 2005).

No relato a seguir, “[...] *além de possibilitar o trabalho coletivo etc...*” (do participante A), podemos destacar outra possibilidade oferecida pelos *GeoGebra*. Com um olhar para o nosso Referencial Teórico, podemos destacar que esse trabalho coletivo não se trata somente das interações entre alunos e professores, mas também com as tecnologias digitais (mídias). Para Borba e Villareal (2005), a produção do conhecimento e pensamento matemáticos ocorrem a partir do coletivo formado por seres humanos e não humanos, ou seja, a constituição do conhecimento não ocorre somente por obra de um ser sozinho, totalmente independente dos demais, ou mesmo por um coletivo humano sem nenhum vínculo com mídia e ou técnica.

Seguindo essa linha de raciocínio, Borba e Penteadó (2012) pontuam que:

Há uma interação entre humanos e não humanos de forma que aquilo que é um problema com uma determinada tecnologia passa a ser uma mera questão na presença de outra. [...] O nosso trabalho, como educadores matemáticos, deve ser o de ver como a matemática se constitui quando novos atores se fazem presentes em sua investigação. [...] fica evidente que uma mídia não extermina a outra. De maneira geral, o cinema não acabou com o teatro, o vídeo não eliminou o cinema; da mesma forma, a oralidade não foi suprimida pela escrita: pelo contrário, foi criada uma nova oralidade a partir da leitura escrita. Não acreditamos que a informática irá terminar com a escrita ou a oralidade, nem que a simulação acabará com a demonstração em Matemática. É provável que haverá transformações ou reorganizações. (BORBA; PENTEADO, 2012, p. 49)

Conforme esses autores, o saber matemático, assim como qualquer forma de conhecimento, é fomentado a partir de dois ou mais agentes, de modo que a inclusão de um terceiro ou mais, não invalida ou diminui o que se tem consolidado. Nesse sentido, o *GeoGebra*, conforme entendimento apresentado pelo participante A, proporciona esse movimento de interação entre diversos sujeitos, de modo a transformar ou reorganizar o saber, objeto de aprendizagem.

Tivemos, também, como um dos nossos questionamentos, o período que se suceder à pandemia. Nesse sentido, a pergunta elaborada foi a de que “as Tecnologias Digitais, como um recurso no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, passarão a ter maior relevância no período pós-pandemia.

**Participante B:** *Maior relevância acho que não, penso que teve maior visibilidade e conseqüentemente novas alternativas surgiram.*

**Participante F:** *Acredito que maior relevância em decorrência direta da pandemia, não. Talvez alguns docentes passarão a adotar as TD, porém, para ter maior relevância é necessário formação e preparo aos professores, alterar os padrões tradicionais de ensino e até orientar as famílias dos estudantes quanto aos benefícios da utilização das TD. Além, para seu uso, principalmente na Educação Básica, geralmente é necessário ter internet e computadores nas escolas, sendo que muitas não possuem. Resumindo, maior relevância das TD no processo de ensino e aprendizagem de Matemática só será possível por investimentos em formação inicial e continuada de professores, além de estruturas das escolas.*

**Participante G:** *Acredito que não. Pelo que conheci dos professores das escolas em que atuo e professores pesquisadores da pós-graduação, a formação para uso das TICs ainda são precárias e o período de pandemia pode proporcionar uma reflexão acerca da necessidade delas, mas não de como utilizá-las. Talvez, alguns professores busquem, mas acredito que assim que a "normalidade" se reestabelecer, isso ficará ofuscado novamente.*

**Participante L:** *Não sei se essa relevância será duradoura, pois, esse assunto envolve outros fatores que influenciam profundamente sua utilização (acesso é um deles). Mas, vejo que sua importância se evidencia a cada dia de pandemia e será considerada de uma forma diferente. Não tenho dúvidas sobre isso!*

Feitas estas análises, passaremos às suas conclusões epistemológicas, evidenciando o que de mais relevante identificamos no estudo.

## CONCLUSÕES INTERPRETATIVAS DA PESQUISA

O objetivo deste artigo foi analisar algumas possibilidades e desafios do uso do *GeoGebra* nos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra Linear, em especial, em relação ao conceito de Equação Vetorial da Reta, em um curso de Pós-Graduação, em contexto de pandemia.

Quanto às possibilidades do *GeoGebra*, verificamos que é pertinente utilizar o *software* em conjunto com outras estratégias de ensino, pois acreditamos que essa combinação de recursos tem potencial para avançar na compreensão de conceitos da Álgebra Linear. Neste intuito, o coletivo de seres humanos e mídias reorganizam o pensamento, propiciando a produção de conhecimento. Inferimos que a conjugação desses recursos pode ser estendida para outros domínios matemáticos, em particular a Geometria e o Cálculo Diferencial.

Identificamos também que as ações cognitivas de visualização, de construção e de exploração foram evidenciadas ao longo das atividades propostas sobre o estudo da Equação Vetorial da Reta. Sendo assim, a teoria da atividade traz contribuições para a aprendizagem mediada pelo computador, principalmente quando a preocupação está relacionada com as interações com a tecnologia, e não ela em si. Essa observação pode ser corroborada pelas respostas apresentadas pelos participantes, os quais apontaram para essa característica peculiar do *software GeoGebra*.

Um dos desafios observados diz respeito ao desconhecimento da operacionalização do *GeoGebra*. Consideramos que se trata de um *software* pouco utilizado pelos professores em atuação, justamente por exigir uma formação mínima para lidar com esse artefato. Embora seja um software livre, o *GeoGebra* ainda não ganhou alcance prático nos espaços educativos.

Outro fator que se torna um gargalo para a consolidação do *GeoGebra* é a ausência ou falta de equipamentos/meios tecnológicos (computador, celular, internet, dentre outros) por parte dos sujeitos envolvidos no processo educativo, isto é, estudantes e professores, nas diversas modalidades de ensino.

Apesar das dificuldades aqui elencadas, acreditamos que devemos explorar as possibilidades e as potencialidades oferecidas pelas tecnologias digitais, criando propostas de ensino e de aprendizagem que favoreçam, aos alunos e aos professores, o

desenvolvimento das habilidades de experimentação, visualização e construção dos conhecimentos matemáticos.

## REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M.C. (Org). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 5 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2017.

BAIRRAL, M. A. **Licenciandos em matemática analisando o comportamento de pontos notáveis de um triângulo em um ambiente virtual com GeoGebra**. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 37, 4 a 8 de outubro de 2015, Florianópolis, 2015b.

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization**. New York: Springer, 2005.

BORBA, M. C. PENTEADO, M.G. **Informática e Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

BORTOLOSSI, H. J. O uso do software gratuito Geogebra no ensino e na aprendizagem de Estatística e Probabilidade. **VIDYA**, 36(2), 429-440, 2016.

COSTA, R. F. **Aprendizagem da Matemática com cartoons: qual o papel das tecnologias digitais?** (2017). 172f. Dissertação (Mestrado do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade do Estado de Mato Grosso, Barra do Bugres, 2017.

CUNHA, M. F. **Tecnologias digitais em cursos de licenciaturas em Matemática de uma universidade pública paulista** (2018). 250 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro-SP, 2018.

DANIELS, H. **Vygotsky e a Pedagogia**. 2.ed. São Paulo: Loyola, 2011.

DOMINGUES, N. S. **O papel do vídeo nas aulas multimodais de matemática aplicada: uma análise do ponto de vista dos acadêmicos**. 2014. 125 f. Dissertação (Mestrado em 143 Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP. Rio Claro, 2014.

ENGSTRÖM, Y. **Learning by expanding: an activity-theoretical approach to developmental research**. Helsinki, 1987. Disponível em: <chrome-extension://efaidnbmninnkacgpghlepleimforlgl-.../https://lchc.ucsd.edu/mca/Paper/Engstrom/Learning-by-Expanding.pdf>. Acesso em: 10 julho 2020.

ENGESTRÖM, Y. **Expansive learning** at work: toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, Vol. 14, Nº 1, 2001.

ENGESTRÖM, Y., SANNINO, A. Studies of expansive learning: Foundations findings and future Challenges. **Educational Research Review**, 5(1), 1-24.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2016.

JACCOUD, M.; MAYER, R. A observação direta e a pesquisa qualitativa. In: POUPART, Jean et al. **A pesquisa qualitativa**. Enfoques epistemológicos e metodológicos. Petrópolis: Vozes, 2008, p.215-253.

LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. Livros Horizonte, Lisboa, 1978.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática**. Rio de Janeiro: Editora, 34, 1993.

POWELL, A. B.; SILVA, W. Q. O vídeo na pesquisa qualitativa em educação matemática: investigando pensamentos matemáticos de alunos. In: POWELL, Arthur B. (Ed.). **Métodos de pesquisa em Educação Matemática**: usando escrita, vídeo e internet. Campinas: Mercado de Letras, 2015, p. 15-60.

REZENDE, S. R. A. **Ensino desenvolvimental e investigação matemática com o Geogebra: uma intervenção pedagógica sobre o teorema de Tales**. 2016. 187f. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás, programa de pós-Graduação Stricto Sensu em Educação, Goiânia, 2016.

SOUTO, D. L. P. **Transformações Expansivas em um Curso de Educação Matemática a Distância Online**. (2013) 279f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

SOUTO, D. L. P., ARAÚJO, J. L. Possibilidades expansivas do sistema Seres-humanos-com-mídias: um encontro com a Teoria da Atividade. In: Borba, M. C., Chiari, A. (Eds.) **Tecnologias Digitais e Educação Matemática** (p. 71-90). São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

TIKHOMIROV, O.K; **The psychological consequences of the computerization**. In: Werstch, J. The concept of activity in soviet psychology. New York: Sharp, 1981.

VALENTE, J. A. Integração currículo e tecnologias digitais de informação e comunicação: a passagem do currículo da era lápis e papel para o currículo da era digital. In: CAVALHEIRI, A.; ENGERROFF, S. N.; SILVA, J. da C. S. (org.). **As novas tecnologias e os desafios para uma educação humanizadora**. 1. ed. Santa Maria: Biblos, 2013. p. 113-132.