

O *smartphone* e o GeoGebra na extensão dos conceitos de domínio e imagem para produzir conhecimentos

Victor Ferreira Ragoni¹

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

Aparecida Santana de Souza Chiari²

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

RESUMO

O *smartphone*, que em muitos momentos nos acompanha, passou por muitas evoluções e desenvolvimentos. O dispositivo partiu de uma tecnologia de grandes dimensões, que tinha como finalidade a comunicação e a portabilidade, para um dispositivo que hoje é consideravelmente de pequeno porte. Nesse trabalho temos a intenção de apresentar uma discussão baseada na Teoria da Atividade sobre como alunos em interação com o *smartphone* estendem conceitos de domínio e imagem de funções de uma para duas variáveis com o GeoGebra. Adotamos a abordagem qualitativa em que os dados foram produzidos por meio de vídeos, isto é, da gravação de tela dos *smartphones* de um trio de alunos participantes de um Projeto de Ensino de Graduação que durou três segundas-feiras no mês de novembro de 2019 e contou com 11 alunos das graduações em Matemática e Física. Além disso, utilizamos o registro escrito feitos pelos alunos. A análise de dados se desenvolveu a partir da terceira geração da Teoria da Atividade, observando movimentos e estagnações de um sistema de atividade. Observamos que o *smartphone* proporcionou *feedback* imediato e visualização instantânea, propiciando reflexão e questionamentos. Através da Teoria da Atividade, destacamos o papel da comunidade que, mesmo não tendo o poder de agir sobre o objeto, teve destaque nessa atividade para que os sujeitos pudessem superar tensões. Por fim, as tecnologias digitais postas à experimentação e investigação por meio das tarefas exploratórias fizeram o papel de influenciar o pensamento dos sujeitos.

Palavras-chave: Educação Matemática; Tecnologias Digitais; Teoria da Atividade; Ensino Superior; Integrais.

The *smartphone* and GeoGebra in the extension of domain and image concepts to produce knowledge

ABSTRACT

The *smartphone*, which often accompanies us, has gone through many evolutions and developments. The device went from a large technology, which was intended for communication and portability, to a device that today is considerably small. In this work we intend to present a discussion based on Activity Theory about how students interacting with the *smartphone* extend domain and image concepts of functions from one to two

Submetido em: 11/01/2023

Aceito em: 10/07/2023

Publicado em: 22/08/2023

¹ Mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS) – 2021. Doutorando em Educação Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). Campo Grande, Mato Grosso do Sul, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Aral Moreira, 414, Centro, Itaporã, Mato Grosso do Sul, Brasil, CEP: 79890-000. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4901-0034>. E-mail: ragonivictor@hotmail.com.

² Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Docente na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Campo Grande, MS, Brasil. Endereço para correspondência: Instituto de Matemática da UFMS, Av. Costa e Silva, s/n, Bairro Universitário, Campo Grande, MS, Brasil. CEP: 79070-900. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7865-9356>. E-mail: aparecida.chiari@ufms.br.

variables with GeoGebra. We adopted the qualitative approach in which the data were produced through videos, that is, the screen recording of the smartphones of a trio of students participating in an Undergraduate Teaching Project that lasted three Mondays in November 2019 and It had 11 students from the undergraduate courses in Mathematics and Physics. In addition, we used the written record made by the students. Data analysis was developed from the third generation of Activity Theory, observing movements and stagnation of an activity system. We observed that the smartphone provided immediate feedback and instant visualization, encouraging reflection and questions. Through Activity Theory, we highlight the role of the community that, even not having the power to act on the object, was highlighted in this activity so that the subjects could overcome tensions. Finally, digital technologies put to experimentation and investigation through exploratory tasks played the role of influencing the subjects' thinking.

Keywords: Mathematics Education; Digital Technologies; Activity Theory; University Education; Integrals.

El *smartphone* y el GeoGebra en la extensión de conceptos de dominio e imagen para producir conocimiento

RESUMEN

El *smartphone*, que a menudo nos acompaña, ha pasado por muchas evoluciones y desarrollos. El dispositivo pasó de ser una gran tecnología, que estaba pensada para la comunicación y la portabilidad, a un dispositivo que hoy en día es considerablemente pequeño. En este trabajo pretendemos presentar una discusión basada en la Teoría de la Actividad sobre cómo los estudiantes interactuando con el *smartphone* amplían los conceptos de funciones de dominio e imagen de una a dos variables con GeoGebra. Adoptamos el enfoque cualitativo en el que los datos fueron producidos a través de videos, es decir, la grabación de pantalla de los teléfonos inteligentes de un trío de estudiantes que participan en un Proyecto de Enseñanza de Grado que duró tres lunes de noviembre de 2019 y contó con 11 estudiantes de los cursos de grado. en Matemáticas y Física. Además, se utilizó el registro escrito realizado por los estudiantes. El análisis de datos se desarrolló a partir de la tercera generación de la Teoría de la Actividad, observando los movimientos y estancamientos de un sistema de actividad. Observamos que el teléfono inteligente proporcionó retroalimentación inmediata y visualización instantánea, fomentando la reflexión y las preguntas. A través de la Teoría de la Actividad, destacamos el papel de la comunidad que, aun no teniendo el poder de actuar sobre el objeto, se destacó en esta actividad para que los sujetos pudieran superar las tensiones. Finalmente, las tecnologías digitales puestas a la experimentación e investigación a través de tareas exploratorias desempeñaron el papel de influir en el pensamiento de los sujetos.

Palabras clave: Educación Matemática; Tecnologías Digitales; Teoría de la Actividad; Enseñanza Superior; Integrales.

INTRODUÇÃO

Pense na seguinte situação: Levanto-me cedo com um barulho tocando, desligo, levanto e vou ver minhas notificações, me lembro das vezes que engraçadamente me pegava dizendo “ai meu Deus, onde deixei meu celular?” e o dispositivo estava no bolso de minha calça. Nesse momento precisamos esclarecer que estamos falando do *smartphone*, uma tecnologia que vem se desenvolvendo desde os anos 1980.

A partir da tecnologia mencionada anteriormente, o *smartphone*, que em muitos momentos nos acompanha, começamos a nos interrogar sobre a sua presença no ensino de Matemática. Assim, em Ragoni (2021) vemos uma exploração da evolução do celular/*smartphone* conforme os anos e um entrelaçamento com a as fases de desenvolvimento das Tecnologias Digitais no âmbito da pesquisa em Educação Matemática (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2012).

Nesse entrelaçamento, é possível verificar que o dispositivo partiu de uma tecnologia de grandes dimensões, que tinha como finalidade a comunicação e a portabilidade, para um dispositivo que hoje é consideravelmente de pequeno porte, possível de ser guardado em um bolso de calça e que cabe na mão.

Estamos falando de uma tecnologia que se desenvolveu rápido, mas ao nos referirmos ao termo “tecnologia” não temos ideia do quanto podemos considerar coisas ao nosso redor como tal. Nesse sentido, Kenski (2012, p. 24) considera que

[...] Ao conjunto de conhecimentos e princípios científicos que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade, chamamos de “tecnologia”. Para construir qualquer equipamento – uma caneta esferográfica ou um computador –, os homens precisam pesquisar, planejar e criar o produto, o serviço, o processo. Ao conjunto de tudo isso, chamamos de tecnologias.

Discutir o seu conceito, sua definição, se torna algo a nos abrir os olhos para as tecnologias que estão ao nosso redor, que estão intrinsecamente enraizadas em nós. Além dessa discussão, entra em foco com mais intensidade as tecnologias digitais. Chiari (2015, p. 38) afirma que, “[...] em educação, normalmente utilizamos o termo ‘Tecnologia Digital’ quando nos referimos ao uso de computador, internet e outros meios associados, como softwares, vídeos digitais, entre outros”.

Além disso, consideramos que o celular se tornou ao longo dos anos um “computador de mão”. Com suas várias funções, deixou de ser meramente utilizado para troca de mensagens e ligações, mas também como uma ferramenta capaz de acessar distintas informações em frações de segundos. Com os *smartphones* podemos fazer cálculos e interagir por meio das redes sociais.

O uso das tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) na aprendizagem é alvo de diversas críticas e de estudos que vêm se intensificando ao longo dos anos. Nesse sentido, “há certa controvérsia sobre a utilização de telefones celulares nas escolas, que envolve inclusive políticas públicas. Algumas dessas controvérsias perpassam por questões semelhantes à proibição do uso de calculadoras em aulas ou exames” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2015, p. 78).

Essas polêmicas podem ser superadas visando a produção de conhecimentos e aliando as tecnologias digitais, como o *smartphone*, com pedagogias e metodologias que priorizem os estudantes.

O *smartphone* foi pensado para a comunicação a longas distâncias, mas, em pesquisas como Salmasio (2020), Borges (2020), Durães (2021) e Ragoni (2021), ele também se torna um mediador de produção de conhecimentos, a partir de suas funcionalidades e aplicativos. Em Ragoni (2021), além das interrogações acerca do *smartphone*, outro assunto central na discussão é o Cálculo Integral que possui particularidades a serem discutidas, como os conceitos de domínio e imagem de funções de duas variáveis.

Quando lançamos nosso olhar para a questão das funções devemos fazer um adendo, ou seja, ao tentarmos representar o gráfico de uma função do tipo $f(x)$, uma das grandes dificuldades reside na busca por gráficos de funções que exigem maior detalhamento. Mas ao tentarmos desenhar uma função do tipo $f(x,y)$ essa dificuldade pode se tornar maior, pois passa a ser um objeto matemático tridimensional. É nesse ponto que quero tocar, pois quanto ao Cálculo de várias variáveis, os elementos geométricos são de extrema importância para a visualização e compreensão de problemas.

Diante desse contexto, visamos nesse trabalho, oriundo da pesquisa de mestrado do primeiro autor orientado pela segunda autora, apresentar uma discussão baseada na Teoria da Atividade sobre como alunos em interação com o *smartphone* estendem conceitos de domínio e imagem de funções de uma para duas variáveis com o GeoGebra.

Além disso, separamos esse artigo em cinco sessões, que compreendem uma introdução que aqui leem, seguida por uma pequena introdução à Teoria da Atividade, que sustenta a dissertação de mestrado da qual esse trabalho é fruto. A quarta sessão trata da análise de dados, mais especificamente da observação feita no segundo encontro da produção de dados, antecedida pela metodologia e procedimentos utilizados. Por fim, trazemos as nossas conclusões em relação a esse episódio do material analisado.

TEORIA DA ATIVIDADE

A terceira geração da Teoria da Atividade, a qual esse trabalho se pauta em sua análise, considera que “[...] a atividade é uma formação coletiva, sistêmica, que possui uma estrutura mediadora complexa” (DANIELS, 2011, p. 167). Além disso, como Souto (2014, p. 24) salienta:

[...] a atividade é tomada como um processo contínuo de mudança e movimento decorrentes de crises e rupturas, os quais, inter-relacionados em uma formação criativa, composta de múltiplos elementos, vozes e concepções, provocam transformações e inovações que são entendidas do ponto de vista histórico.

O excerto anterior nos deixa curiosos do que poderiam ser essas “crises e rupturas”, relacionadas a uma “formação criativa” que tem “múltiplos elementos, vozes”, que geram “transformações” e que são compreendidas a partir do seu histórico. Basicamente a autora está se referindo aos cinco princípios propostos por Engeström (2001): contradições internas, sistema de atividades, multivocalidade, transformações expansivas e historicidade.

Engeström (1987) sistematiza um todo unificado como o primeiro princípio, “[...] que é um sistema de atividade coletiva, mediado por artefatos e orientado ao objeto [...] [e que] é tomado como a unidade principal de análise [...]” (ENGESTRÖM, 2001, p. 136, tradução nossa), como sugerido a seguir:

Imagem 1 – Sistema de Atividade



Fonte: Baseado em Souto (2014).

O SA integra em sua estrutura artefato, sujeito, objeto, regras, comunidade e a divisão do trabalho. Cada um desses integrantes chamamos de “nó” do sistema. É preciso ainda destacar que o objeto é representado com um destaque oval nessa estrutura, o que é justificado por Engeström (2001, p. 136, tradução nossa) como “[...] um alvo em movimento, não redutível a objetivos conscientes de curto prazo”.

Por ter esse caráter coletivo, o SA ainda vem carregado por uma multiplicidade de vozes, conceitos, opiniões, ou seja, aqui se encontra o segundo princípio proposto por Engeström (2001): multivocalidade.

Um sistema de atividade é sempre uma comunidade de múltiplos pontos de vista, tradições e interesses. A divisão do trabalho em uma atividade cria posições diferentes para os participantes, que carregam suas próprias histórias diversas, e o próprio sistema de atividade carrega múltiplas camadas e vertentes da história gravadas em seus artefatos, regras e convenções (ENGESTRÖM, 2001, p. 136, tradução nossa).

O autor ainda destaca que a multivocalidade “[...] é uma fonte de problemas e uma fonte de inovação, exigindo ações de tradução e negociação” (ENGESTRÖM, 2001, p. 136, tradução nossa).

A historicidade é o terceiro princípio da Teoria da Atividade. É, aparentemente, o princípio mais simples de se entender, pois, assim como a multivocalidade, seu enunciado é autoexplicativo. Ou seja, é através da história contínua que devemos analisar o desenvolvimento de uma atividade.

Engeström (2001) defende a ideia de que um sistema de atividade é transformado segundo a sua história, ou seja, seus problemas e desafios tomam formas e “só podem ser entendidos em relação à sua própria história” (ENGESTRÖM, 2001, p. 136, tradução nossa).

No quarto princípio da Teoria da Atividade proposto por Engeström (2001) temos as contradições internas. Tal princípio se define por serem tensões estruturais que acontecem durante uma atividade. Essas tensões podem ocorrer de quatro diferentes formas.

Corroboramos Soares e Souto (2014) ao considerarem para estas diferentes formas níveis para diferenciá-las. No primeiro nível, as chamadas contradições primárias, ocorrem dentro dos nós do sistema de atividade (SOARES; SOUTO, 2014), por exemplo, em um sistema de atividades de um professor que se propõe a trabalhar com um dispositivo móvel em sua aula. Nesse sistema podem aparecer regras como “usar o dispositivo móvel para a construção de polígonos” e esse artefato ser proibido por uma regra para consulta à internet. Assim, temos duas regras se “chocando”, no mesmo nó, pois ao mesmo tempo que o docente tem a intenção de utilizar o dispositivo, existem normativas que o proíbem. Para “solucionar” essa tensão o docente pode incluir em seu plano de aula que o uso do celular será pedagógico.

As contradições secundárias, nível 2, ocorrem dentro de um sistema e entre elementos (*nós*) diferentes, por exemplo, entre o sujeito da atividade e o artefato (SOARES; SOUTO, 2014). Esse nível de contradição poderá ser melhor exemplificado quando chegarmos ao capítulo de análise dos dados, cujas tensões poderão ser notadas.

Para que ocorram as contradições terciárias, nível 3, é necessária uma tensão estrutural entre “ações que formam o objeto coletivo, principalmente entre algo novo que é proposto e algo que é padrão dominante” (SOUTO, 2014, p. 26-27). Por exemplo, entre o objeto do sistema de atividade dos alunos “jogar na internet” e o objeto do sistema de atividade do professor “aprendizagem de polígonos com o *smartphone* no GeoGebra”. Isto é, segundo Engeström (1987, p. 116, grifo do autor), a contradição terciária ocorre “[...] **entre** o objeto/motivo da forma dominante da atividade central e o objeto/motivo de uma forma da atividade central culturalmente mais avançada”.

As contradições de nível 4, quaternárias, ocorrem entre um sistema de atividade e sistemas de atividade vizinhos, interligados (SOARES; SOUTO, 2014). Por exemplo, quando o professor sugere uma atividade a ser feita com o uso do smartphone, mas os alunos estão em outro movimento, tal como fazer uma atividade de outra disciplina.

As contradições internas podem ser observadas por meio do discurso dos sujeitos, como veremos a categorização feita por Engeström e Sannino (2011) e estudada por Galleguillos (2016).

Galleguillos (2016), apoiada em Engeström e Sannino (2011), faz uma análise das contradições internas por meio das Manifestações Discursivas Sistêmicas (MDS) e categoriza como pode ocorrer esse princípio por meio das expressões linguísticas. Engeström e Sannino (2011), e mais tarde também estudado por Galleguillos (2016), apontam que podem surgir MDS de quatro tipos: dilemas, conflitos, conflitos críticos e beco sem saída. Tais MDS podem ser vistas na Imagem 2 a seguir:

Imagem 2 – Tipos de manifestações discursivas de contradições

Manifestações	Características	Dicas linguísticas
Beco sem saída ou Duplo vínculo	Beco sem saída: situação que não oferece alternativas de prosseguir.	"nós", "nos", "devemos" ou "teremos que". Perguntas retóricas de pressão, expressões de impotência.
	Duplo vínculo: situação em que se enfrentam duas alternativas igualmente inaceitáveis ou indesejáveis. Resolução: transformação prática ou mudança radical (indo além das palavras)	"Permita a nós fazer isso", "o faremos".
Conflito crítico	Enfrentando motivos contraditórios em interação social, sentindo-se maltratado ou culpado.	Estrutura narrativa pessoal, emocional, moral, metáforas.
	Resolução: Encontrando novo sentido pessoal e negociando um novo significado.	"Eu agora realizo isso [...]"
Conflito	Fundamentando, argumentando e criticando.	"não", "eu discordo", "isto não é verdade".
	Resolução: Encontrando um compromisso ou submissão	"Sim", "isto eu posso aceitar".
Dilema	Expressão ou intercâmbio de avaliações incompatíveis.	"por um lado [...] por outro lado"; "sim, mas", "mas".
	Resolução: negação, reformulação.	"Eu não quis dizer isso", "eu agora quero dizer".

Fonte: Galleguillos (2016).

As MDS nos auxiliarão, no momento da análise, para identificar possíveis traços linguísticos que podem apontar para prováveis contradições internas ocorrendo durante a atividade, não sendo nosso foco principal, mas nos ajudando em momentos chave.

As contradições internas, assim como os outros, são muito importantes para a atividade, uma vez que são o motor necessário, são as molas que propulsionam possíveis transformações expansivas dentro do sistema de atividades (SOUTO, 2014). As transformações expansivas, dentro da Teoria da Atividade, é o quinto e último princípio que

Engeström (2001) traz. Sobre as transformações expansivas, Engeström (2001, p. 137, tradução nossa), comenta que

Os sistemas de atividade passam por ciclos relativamente longos de transformações qualitativas. À medida que as contradições de um sistema de atividades são agravadas, alguns participantes individuais começam a questionar e a se desviar de suas normas estabelecidas. Em alguns casos, isso aumenta a visão colaborativa e um esforço deliberado de mudança coletiva.

Essas transformações ocorrem quando “[...] o objeto e o motivo da atividade são reconceitualizados para abarcar um horizonte de possibilidades radicalmente mais amplo do que no modo anterior da atividade” (ENGESTRÖM, 2001, p. 137, tradução nossa). Ou seja, mudam o objeto e o motivo da atividade em busca de abarcar novos horizontes e novas possibilidades.

A Teoria da Atividade, tanto nesse trabalho quanto na dissertação, permeou o planejamento da produção de dados, a pré-análise e a análise dos dados. A teoria nos deu caminhos para produzir, selecionar e analisar os dados existentes. Assim, neste artigo utilizamos a TA como uma base para analisar os vídeos produzidos pelos licenciandos. Na próxima seção indicamos a metodologia a qual nos pautamos para a dissertação e para este trabalho. Apresentando também os dados produzidos.

METODOLOGIA

Para justificar essa seção de metodologia, gostamos de iniciar sobre o próprio termo, isto é, nossa concepção do que significa “metodologia”. Nessa linha de raciocínio vamos buscar em Goldenberg (2018) suas considerações. A autora traz que metodologia “[...] é um caminho possível para a pesquisa científica [...]” (GOLDENBERG, 2018, p. 14). Além disso, Goldenberg (2018, p. 109) define como sendo “[...] etimologicamente, o estudo dos caminhos a serem seguidos, dos instrumentos usados para se fazer ciência [...]”.

Com o termo metodologia esclarecido, temos a necessidade de anunciar que para esse trabalho, e para a pesquisa desenvolvida, estamos adotando a abordagem qualitativa, uma vez que nesse tipo de perspectiva “a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória etc” (GOLDENBERG, 2018, p. 14).

Na produção de dados qualitativos nos baseamos em uma triangulação de dados para “[...] checar algum detalhe ou [...] compreender melhor algum fato ocorrido [...] promovendo

uma maior credibilidade de sua pesquisa” (ARAÚJO; BORBA, 2013, p. 42). Esses mesmos autores comentam que a triangulação de dados “[...] consiste na utilização de vários e distintos procedimentos para obtenção de dados” (ARAÚJO; BORBA, 2013, p. 41).

Tais dados foram produzidos por meio de vídeos, isto é, da gravação de tela dos *smartphones* de um trio de alunos participantes de um Projeto de Ensino de Graduação que durou três segundas-feiras no mês de novembro de 2019 e contou com 11 alunos das graduações em Matemática e Física. O vídeo integra imagens (manipulação do aplicativo GeoGebra, movimentos feitos pelos alunos) e sons (conversas entre alunos, discussões grupais e discussões gerais).

Corroboramos Henrique e Bairral (2019) quando os autores trazem que os registros em vídeo trazem possibilidades como imagens combinadas a áudio, o que pode auxiliar no processo de análise ao buscarmos o entendimento de interações “[...] individualmente no caso do estudante – tecnologia ou no contexto social (professor – estudantes e estudantes – estudantes)” (HENRIQUE; BAIRRAL, 2019, p. 117). Logo, com os vídeos podemos ter um norte para a análise de dados de modo alinhado à perspectiva teórica que consideramos. O próprio vídeo da tela permite que o processo de triangulação seja utilizado, ao sincronizar as ações e toques em tela com o áudio dos participantes.

Além dos vídeos, elaboramos tarefas exploratórias as quais os alunos precisavam se basear para buscar responder às questões entregues em folhas de respostas. Por tarefas exploratórias entendemos que

[...] o professor, em lugar de ensinar diretamente procedimentos e algoritmos, mostrando exemplos e propondo exercícios para praticar, propõe aos alunos um trabalho de descoberta, ao mesmo tempo que promove momentos de negociação de significados, argumentação e discussão coletiva. Procura-se, deste modo, levar os alunos a desenvolver o seu raciocínio, mas também a sua compreensão da Matemática [...] (PONTE; QUARESMA, 2014, p. 103).

Nas folhas de respostas eram retiradas as perguntas que constavam na Tarefa e entregues separadas. Tais perguntas eram instigadoras de reflexões e discussões entre os alunos e entre a sala toda.

A seguir, temos a análise desse encontro com a Teoria da Atividade de terceira geração nos dando base para olhar a atividade dos alunos durante a execução dessa tarefa. Por ser uma exploração bastante profunda e com muitos dados, optamos por retirar um trecho em que os alunos se aventuram por outra tarefa relacionada ao plotar gráficos no GeoGebra 3D.

Além disso, a TA nos orienta na construção de sistemas de atividade com a finalidade de sistematizar a atividade dos alunos. Com a construção desses sistemas podemos verificar suas evoluções e estagnações decorrentes de tensões e possíveis contradições internas. No caso deste trabalho temos três sistemas de atividade: um inicial, um que mostra a tensão entre elementos do sistema e um final. A seguir, temos a análise de dados que fizemos do segundo encontro.

A ANÁLISE DE UM PANORAMA: DESAFIOS TRIDIMENSIONAIS

Antes de comentarmos sobre o segundo encontro, é importante introduzir a respeito do primeiro momento do curso que propomos para a produção de dados. Nesse encontro buscamos a exploração do aplicativo GeoGebra 2D e a construção de uma função a partir de um protocolo com instruções, incrementando essa função com a aplicação da Soma de Riemann. Nessa primeira reunião os participantes tiveram a possibilidade de explorar as funcionalidades do GeoGebra.

No segundo encontro, objetivo de análise desse artigo, sentimos a necessidade de dividi-lo em dois grandes momentos, o primeiro tratava de explorar a área sob gráficos de funções a partir da Soma de Riemann e Integrais Definidas. O segundo objetivou deixar que os alunos se ambientassem com o GeoGebra 3D, construíssem uma função de duas variáveis no GeoGebra tridimensional e manipulassem a função. Este ainda foi subdividido em outros dois momentos: i) os alunos foram convidados a pensar e explorar o domínio das funções e ii) exploração de um *applet* enviado aos alunos.

O primeiro momento iniciou com o retrospecto das atividades desenvolvidas no encontro anterior e introdução do debate do dia. Em seguida, aos alunos foi solicitado que pegassem seus *smartphones* e que cada um da dupla abrisse um aplicativo, ou seja, um o GeoGebra 2D e o outro o GeoGebra 3D.

Para que possamos analisar o SA historicamente, vamos fazer suposições com os vídeos do GeoGebra 2D e tentar sustentá-las com as entrevistas. O vídeo 2 de Danilo, Íris e João inicia com a discussão das questões entregues junto ao Protocolo de Construção II, cuja finalidade era construir uma função e inserir os comandos de SomaDeRiemann e IntegralNumérica, como pode ser visto a seguir:

Imagem 3 – Protocolo de Construção II

Nome: _____

PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO II

- a) Criar os controles deslizantes abaixo:
 - i) Insira no campo de entrada:
 $a = 1.$
 $b = 1.$
 $c = 1.$
 $n = 100.$
- b) Insira uma função. Por exemplo: $f(x) = \frac{c}{x} + 1$ (por favor, não utilize os números “a” e “b” nessa construção, pois eles serão usados no passo seguinte, mas fique à vontade para usar o “c” e/ou criar outros controles deslizantes para construir sua função).
- c) Insira o comando SomaDeRiemannInferior
SomaDeRiemannInferior(f, a, b, n)
- d) Após a manipulação insira o comando IntegralNumérica
IntegralNumérica(f, a, b)

Fonte: dados da pesquisa (RAGONI, 2021).

Com a construção feita e as discussões nos grupos finalizadas, foi feita a discussão com a professora Cida com o intuito da sistematização, cujas perguntas (Quadro 1) eram projetadas na lousa para iniciar o debate com todos.

Quadro 1 – Perguntas norteadoras do Encontro II

Perguntas:

- a) Ao explorar a construção feita, o que percebeu quanto ao comando *IntegralNumérica* e à *SomaDeRiemann*?
- b) O que percebe quando manipula *b* em relação aos valores do *IntegralNumérica* e à *SomaDeRiemann*?
- c) Qual a relação dada pelo cálculo integral e a área abaixo da figura?

Fonte: dados da pesquisa (RAGONI, 2021).

É nesse momento que o vídeo começou e Íris trouxe uma questão intrigante para a discussão, que é o caso de a função ser par ou ímpar. A indagação de Íris tem relação com um comportamento que o aplicativo GeoGebra apresentava. Em alguns casos ele retornava números ou apresentava a palavra “indefinido” ou, em outros casos, mostrava o símbolo de infinito. A função pedida para a construção, $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, era descontínua e indefinida em $x = 0$, ou seja, quando o intervalo de integração continha esse ponto, o aplicativo apresentava alguns comportamentos não comuns.

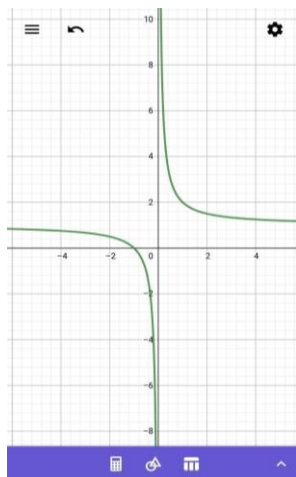
Algumas conjecturas foram elaboradas durante a discussão, como quando o intervalo era $[-a, a]$, ou seja, ao inserir um intervalo de integração com um número real negativo e seu oposto, o GeoGebra apresentava como resultado $2a$, isto é, o dobro de a . Nesse caso, 0

também é contemplado e algumas questões foram levantadas, embora, nesse momento, desejava-se entender a relação que Íris fez sobre o fato da função ser par ou ímpar.

O que se pode tentar supor é que Íris estivesse buscando uma resposta para a questão: Por que o GeoGebra retorna um número, indefinido ou infinito para um intervalo que contemple $x = 0$? [já que, teoricamente, isso não seria possível por se tratar de uma descontinuidade?]. Uma explicação para isso é a questão de simetria da função, cujos conceitos envolvem ser uma função par ou ímpar.

Uma função f é considerada par quando $f(-x) = f(x)$, qualquer que seja o valor de $x \in D(f)$. Nesse caso ela é simétrica em relação ao eixo y . Uma função f é considerada ímpar quando $f(-x) = -f(x)$, qualquer que seja o valor de $x \in D(f)$. Isso quer dizer que deve haver uma simetria de reflexão da função em relação ao ponto $O = (0,0)$, o ponto da origem.

Imagem 4 – Print da função $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$



Fonte: construção própria.

Note, entretanto, que a função dada não possui nenhuma das simetrias citadas, ou seja, não é par e nem ímpar. Isso é resolvido quando a professora Cida interfere e faz os alunos chegarem a uma conclusão³:

Í: Essa função é simétrica, não é?

C: Ela tem uma simetria sim.

[...] Inaudível [...]

Í: Ela é positiva, não é?!

D: Eu acho que ela é ímpar, não?

C: Aqui íris, oh... Se a gente olha a expressão aqui.

D: Ela é ímpar.



³ Disponível em: <https://youtu.be/ctat9naYVv8>. Acesso em: 21 jun. 2020.

C: Se fosse só um sobre x seria ímpar, mas esse mais um tá fazendo com que ela não seja...

D: Nem par e nem ímpar.

C: Nem par e nem ímpar. Porque olha... para ser par ela deveria ter simetria em relação ao y (inaudível)... e não é! E para ser ímpar ela deveria (inaudível), só que como ela tá deslocada uma unidade para cima tá “quebrando” a simetria.

Í: Entendi.

C: Esse mais um tá “quebrando” a simetria.

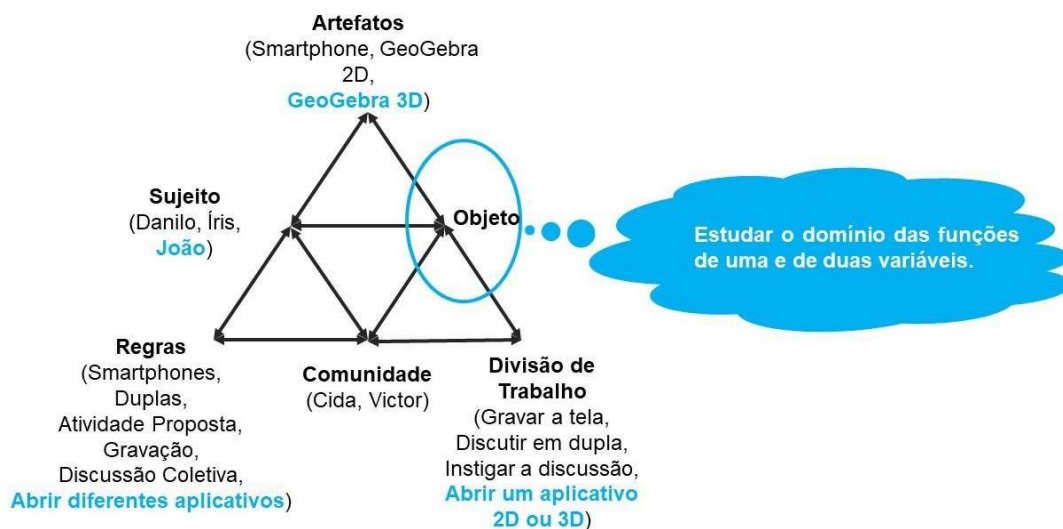
D: Será que foi isso que deu aquela “bugada”?

Í: Talvez seja isso que esteja fazendo você ter valor ali quando eles são opostos (inaudível)... a indeterminação. Se a gente pegar...

Na segunda parte do encontro os alunos foram instigados a pensar e explorar o domínio das funções. Um membro da dupla ficou responsável em colocar uma função de uma variável no GeoGebra 2D e o outro em criar uma função de duas variáveis no GeoGebra 3D.

Os alunos ficavam livres para escolher qual função colocar em cada aplicativo e não havia nenhum protocolo de construção, com o intuito de deixar os alunos livres para exploração e a fim de propiciar novas possibilidades, diferentes funções e maior abrangência matemática, pois muitos alunos inseriram funções que nem pensaríamos. Com isso, podemos construir um Sistema de Atividade Inicial do segundo encontro:

Imagem 5 – Sistema de Atividade Inicial do segundo encontro



Fonte: os autores, 2021.

Em relação a um encontro anterior, o Sistema de Atividade foi modificado. Tivemos a adição um sujeito, João. Uma nova divisão de trabalho foi criada: um membro abria o aplicativo 2D e o outro abria o 3D, o que implicava ainda em uma nova regra “abrir diferentes aplicativos”. Por fim, temos a inserção de um novo artefato: GeoGebra 3D, o que gera novos movimentos dentro do SA.

Os alunos são instigados a estudar o domínio de funções em dois aplicativos, isto é, das funções de uma variável no aplicativo 2D e funções de duas variáveis no aplicativo 3D. Em um movimento inicial os sujeitos se encontram paralisados no passo de plotar o gráfico no ambiente tridimensional, ocorrendo uma paralisação do SAI do segundo encontro, o que foi superado com o decorrer de discussões e problematizações. Ao voltar para a tarefa que foi proposta, precisamos deixar evidente as perguntas que os alunos se ancoraram para a discussão. Assim, para aquele momento, definimos como questões norteadoras:

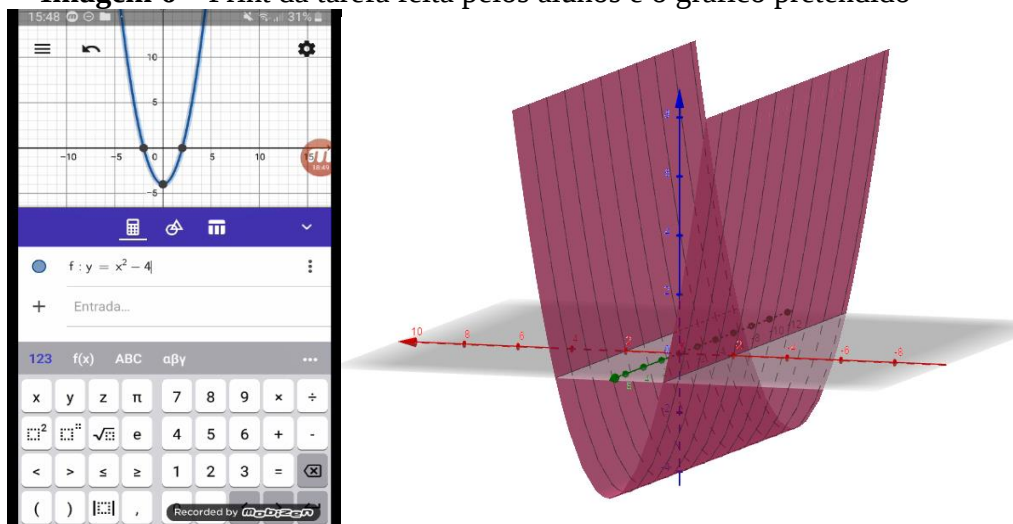
Quadro 2 – Perguntas norteadoras

- | | |
|----|---|
| a) | Como podemos discutir o domínio das funções? Que semelhanças e diferenças você destaca entre eles? |
| b) | Que relações, semelhanças e diferenças você nota entre ambos os gráficos? |
| c) | Como a ideia dos conceitos de partição e de pontos de amostragem poderia ser pensada para o domínio de funções de duas variáveis? |

Fonte: dados da pesquisa (RAGONI, 2021).

Na discussão sobre domínio os alunos decidiram por usar uma função quadrática, nesse caso $f(x) = x^2 - 4$ para o ambiente bidimensional e $f(x, y) = x^2 - 4$ para o GeoGebra 3D. Aparentemente temos que ambas as funções são iguais em termos de expressão algébrica, mas para o primeiro ambiente ela se torna uma “linha”, enquanto para o ambiente tridimensional é como se fosse uma folha de papel cônica, como segue nas imagens:

Imagem 6 – Print da tarefa feita pelos alunos e o gráfico pretendido



Fonte: Print da tarefa dos alunos e construção própria, respectivamente.

Na discussão⁴ vemos algumas reflexões dos alunos sobre o domínio, como o diálogo que segue:

I: Como podemos discutir o domínio das funções? Semelhanças e diferenças que você destaca entre eles. Pega uma função que te agrada. Vamos pegar a parábola que é uma das mais fáceis que a gente tem e vamos jogar você no 2D e eu joga no 3D.

D: Beleza!

I: Você não trouxe celular hoje?

J: Eu não tenho. Estou sem celular.

I: Te entendo. Já passei por isso.

D: Qual que é a parábola? X ao... Ah, não. Parábola, vamos por x ao quadrado menos...

I: É... Eu vou colocar ela, só que eu vou colocar ela diferente.

D: Y igual x ao quadrado.

I: Vou colocar ela...

D: Coloquei x ao quadrado menos quatro.

J: Deixa só x quadrado, mais bonitinho, mais fácil.

D: Melhor só x quadrado?

I: Não... Você colocou x quadrado menos quatro?

D: Arram...

I: Não tem problema não. f. De... (inaudível) colocar aqui... x , y , z é igual...

C (ao fundo): E aí?! Como tá a discussão? É... vocês querem que a gente sistematize? A gente já cancelou a terceira hoje, por conta do tempo. Aí a gente faz a terceira de hoje na segunda que vem. Aí a ideia é: terminar essa discussão, é... socializar as respostas e eu queria fazer uma fala final sobre esses quatro elementos: gráfico, domínio, partição e ponto de amostragem. A gente tá preparando o terreno para a discussão que seria hoje e a gente passou para a semana que vem.

I: Como eu coloquei só assim, ela tá de novo grudada lá. Ela não subiu.

D: Tá... Como podemos discutir o domínio... o domínio das funções? Que semelhança... que semelhanças você destaca entre elas? Elas são iguais!

J: Elas não formam uma concavidade?!

D: Como podemos discutir os domínios das funções? O domínio? Vamos colocar... vamos tirar o quatro porque o domínio fica todos os reais.

J: Oxi... aí também está.

D: Também está os reais?

J: Também está o domínio, todos os reais.

D: Opa...

I: É... o quatro só te interfere na imagem. Olhando aqui ó...

D: Como podemos discutir... Sim. Entendi. Isso que era pra fazer: pegar a mesma função para analisar o domínio.

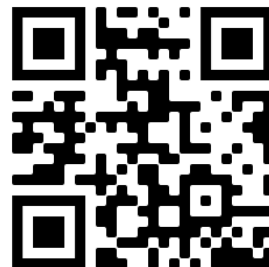
C (ao fundo conversando com outro aluno): Mudou o que era domínio?

D: Mudou alguma coisa do domínio aí? Mudou o domínio?

I: Não.

D: Não?

I: Não. Não muda.



Ao discutirem a construção e o domínio, os alunos chamam a nossa atenção novamente para a estrutura, pois ao inserir " $f(x, y, z)$ " o GeoGebra não entende que estamos no ambiente tridimensional e sim que procuramos uma imagem já em quatro dimensões,

⁴ Disponível em: <https://youtu.be/xfLlM1dbWUw>. Acesso em: 21 jun. 2020.

indo além do que o aplicativo pode fazer, o que pode explicar a fala de Íris ao se referir que a função “tá de novo grudada lá”, que “ela não subiu”.

Aparentemente os alunos entram em acordo que o domínio não muda, mas gostaria de chamar a atenção para a questão de duplas ordenadas, pois é nesse ponto que a intenção da primeira pergunta repousa. Quando estamos trabalhando com funções de uma variável, temos que o domínio, em geral, é o conjunto dos números reais, que pode ser representado por uma reta numérica. Ao trabalharmos com funções de duas variáveis temos a “adição” de uma outra dimensão ao domínio, isto é, passamos a usar um par ordenado.

A partir disso, esperávamos que os alunos buscassem explorar os gráficos, olhando para o domínio e chegassem à conclusão de que ao trabalhar no ambiente tridimensional, ao escrevermos a estrutura “ $f(x, y)$ ”, eles estariam inserindo pontos do tipo: $(0, 1)$, $(-2, 3)$, $(0, 2148, 9, 21)$ etc. Com isso, poderiam pensar que, no caso, o domínio seria R^2 .

Como as discussões dos alunos continuaram sobre domínio, vamos a um novo diálogo⁵ em que Cida (comunidade) também entra em atividade para resolver questões. O diálogo tem em torno de cinco minutos, por isso os principais pontos são: Cida instiga os alunos a investigarem quais pontos estariam presentes para que a imagem fosse tridimensional. Como esses pontos deveriam ser apresentados.

Com Cida instigando e provocando reflexões nos alunos, eles começam a questionar se o que haviam concluído estava correto.

J: Mas aqui, então... é o domínio vai ser todos os reais.

D: Sim.

I: Sim.

J: Quando (inaudível) permanece os reais?

I: O domínio permanece o reais.

C: Me dá exemplo de um ponto que tá no domínio... dessa função.

J: É...

I: Da z igual x ao quadrado?

J: Um, dois, três, quatro...

D: Todos os reais.

I: O zero?

J: O zero...

C: E tem mais gente além de todos esses?

J: Mais gente que os reais?

I: Mais gente que os reais não dá...

D: Professora fez uma pegadinha com você e você caiu.

C: Mais gente que os reais dá...

I: Tem os imaginários, mas...

C: Mas tem outro sentido de **ampliação**, é que eu não queria matar a discussão, mas é...

I: Eu juro que não entendi a pergunta. Porque o domínio...

C: O Danilo falou assim que qualquer número... qualquer número aí faz parte da... vocês estão vendo aqui a...



⁵ Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=fdDkbEZtn1s>. Acesso em: 21 jun. 2020.

I: Não, nem tudo. Porque você... o que a gente tem na função é o que tá contornado de verde, certo?
C: Isso... Esse é o gráfico da função. Essa é a folha.
I: Esse é o gráfico da função. Eu posso pegar pontos... eu vou fazer aqui, que assim eu sou mais...
J: Óh... esse eixo em verde é o x.
D: Sim.
I: Sim, mas a sua função é essa **folha** verde que tá...
C: O gráfico dela...
I: É isso aqui. Ela é isso! (provavelmente Iris se utilizou de uma folha sulfite para representar).
C: Então me dá um exemplo de um ponto que pertence a esse gráfico aqui óh... Por exemplo, um ponto que não 'tá nesse plano cinza aí que 'tá apresentado. Um ponto dessa parte aqui. Vocês conseguem pensar?
D: Um ponto que não 'tá dentro desse cinza?
I: É... deixa eu puxar aqui. A gente colocou aqui z igual a x ao quadrado menos quatro né?!
D: Um ponto que não 'tá aqui dentro desse cinza, professora? Mas 'tá tudo dentro do cinza...
C: É... que faz parte... o cinza que eu 'to falando é esse plano aqui, óh...
D: Sim, mas 'tá tudo dentro dele.

Os alunos, junto com Cida, começam a olhar para os gráficos e pensar que o domínio seriam todos os reais, influenciados pelas funções escolhidas. Veja que a reflexão dos alunos não estava totalmente errada, pois para ambas as funções o domínio são os números reais, embora para a função $f(x, y) = x^2 - 4$ a “ampliação” que Cida cita é que para funções de duas variáveis necessita se pensar o domínio R^2 .

Nota-se, ainda, que os alunos já estão discutindo o domínio no ambiente tridimensional com a construção da função quando Iris cita a “folha”, ou seja, a tensão que ocorreu entre artefato e sujeitos já foi superada e o sistema foi movimentado.

Em alguns trechos decidimos por deixar palavras sublinhadas, tais realces no discurso dos alunos trazem algumas ideias que podem dar indícios de contradições. Ou seja, como Galleguillos (2016) constatou, as contradições podem ser manifestadas no discurso com algumas características.

As palavras sublinhadas “mas”, “sim, mas” são potenciais traços de dilemas, uma vez que trazem “[...] uma expressão ou intercâmbio de avaliações incompatíveis entre pessoas [...]” (GALLEGUILLLOS, 2016, p. 84) e “não” de conflitos, pois trazem discordância, resistência, segundo as categorias que Galleguillos (2016) observou. Por isso, nesse momento podemos estar diante de uma contradição interna. Para representar todos os movimentos feitos pelos alunos, construímos o seguinte Sistema de Atividade:

Imagem 7 – Sistema de atividade “tensão sujeito-objeto”



Fonte: os autores, 2021.

Ao olharmos para a representação do sistema uma pergunta pode surgir: “Por que representamos uma tensão entre sujeitos e objetos?”. Quando os dados nos revelam que os alunos não estão conseguindo fazer uma relação de extensão de domínio de funções com uma variável para as funções de duas variáveis, entendemos que os sujeitos ainda não perceberam essa relação.

Além disso, a compreensão dos alunos os leva a pensar que o domínio continua sendo apenas os reais, mas ao partirmos para o estudo das funções de duas variáveis precisamos repensar esse conceito e estendê-lo para os pares ordenados (x, y) , ou seja, R^2 . Com as discussões a seguir⁶, podemos ter uma noção de como os alunos continuaram discutindo essas relações.

I: Menos quatro quando x é igual a zero pertence à função, zero aqui, ele é o que corta...

C: Menos quatro sozinho é só um número.

I: Não, se x igual a zero.

C: Certo.

I: Aí eu vou ter x igual a zero, minha coordenada vai ser zero no x , vai ser y variando porque não tá falando nada pra mim e... vai ser menos quatro no z . Então esse ponto pertence ao meu gráfico...

C: Urrum...

I: E não está no meu plano x . Porque o meu plano... o plano cinza quem tá cortando é o x , porque o x ‘tá... eu coloquei ele igual a zero.

C: Sim. Aqui você... quantos pontos você representou aqui? Quantos pontos do gráfico?

I: Na verdade, eu apresentei um monte por causa da minha variável y . Porque eu percorri o y .

C: É por isso que eu ‘to falando se tem mais gente. É nesse sentido.

D: Mas qual ponto? Eu não entendi a sua explicação.



⁶ Disponível em: <https://youtu.be/e3qneRle0Og>. Acesso em: 21 jun. 2020.

C: Com um e zero... só que você falou assim: “o zero é um ponto do domínio”. Com um e zero você consegue produzir infinitos pontos que ‘tão nessa folha.

I: Eu tinha pegado...

C: Variando todos os números possíveis para y , todos os reais porque y é o que dá profundidade ali.

I: É que nem se eu pegasse a folha de papel e falar que essa... essa sombra que vai dar aqui no meio é o meu y , e quando eu travei no menos quatro eu fiz isso aqui. Eu fiz a minha parábola e puxei aqui, então eu catei todos os y . Você pode ver que eu ‘to com zero, menos um, menos dois, ele ‘tá indo pra menos infinito e mais infinito. Então todo o eixo y .

C: Com um ponto que ele tinha falado “o zero ‘tá no domínio” né?! Mas não é só o zero. É o zero com o zero, o zero com um, o zero com o π , o zero com o menos π .

J: Aí como que a gente **chama isso**, professora?

C: É isso que eu ‘to chamando vocês para a discussão né?! Que domínio é esse? Que natureza é essa? Porque é diferente. **Não é só os reais.**

D: É diferente.

C: É mais gente. Porque para produzir esse menos quatro aqui, como imagem, porque eu usei a imagem ali né?! Eu posso colocar infinitas combinações aqui do tipo zero e alguém em y que eu vou produzir

I: A gente **tem um plano** aqui. A gente não tem mais só...

C: Então vê... eu tenho que... é... mudar... eu tenho que **estender os conceitos**.

É importante notar que Cida, agindo como comunidade, questiona a todo momento os alunos a respeito do domínio, principalmente a partir do questionamento de João, que tenta tirar alguma resposta, dando indícios de que é preciso ir além dos reais. Com a resposta de Cida de que “não é só os reais”, os alunos percebem que existem outros pontos ali além do que estavam considerando. Isso é reforçado por Danilo que comenta “é diferente” e por Iris ao comentar que “[...] tem um plano aqui” e, Cida percebendo os movimentos dos alunos, fala em “[...] estender os conceitos”.

Para vermos como os alunos se comportaram a partir da provocação de Cida, vamos ao próximo excerto⁷:

I: Aqui ó... aqui você vê ó... quando você vira ele assim ó... é que o meu plano tá cortando. ‘Cê não percebe que... é como se ele tivesse uma reta aqui? Ó... Aqui do lado você vê a reta ó... num tem uma reta?

D: Sim.

I: E ele, pra gente, ‘tá cortando, se eu zerar tudo, ele tá cortando onde?

D e I: Em menos quatro.

I: Então quando eu fixei o x igual a zero, eu tirei esse cara aqui, certo? E tirei o restante. E aí eu só sobrei com o z igual a menos quatro. Então ele corta no eixo do z menos quatro. E aí lembra que... acho que eu ‘to colocando errado, é xy . Eu ‘to olhando errado ou não?

J: Não, tá certo.

I: Aí ele vai percorrer todo o eixo do y e menos quatro.

C: Porque y também equilibra ali para variar.

D: Entendi.

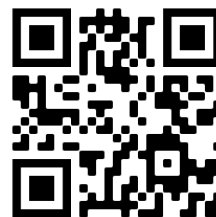
J: Meu Deus... agora eu não sei (inaudível).

I: É por isso que as vezes, quando... nas aulas de cálculo...

D: Professora, então os domínios... **o domínio não permanece... o mesmo.**

J: **Tripla ordenada**... então ali seria... como que fala quando é referente a pares ordenados?

C: Tripla.



⁷ Disponível em: <https://youtu.be/Nh9EGyEq2U0>. Acesso em: 21 jun. 2020.

J: Tripla? Então seria... sei lá como eu iria (não sei ao certo se ele fala referir, diferir, escrever).

I: É que **do r dois passa para o r três**.

C: Percebe que assim... que acontece... qual que é a nossa ideia nesse curso? A minha ideia, se até o final da semana que vem a gente conseguir definir integral dupla eu 'to contente. Que a minha ideia é atribuir significado a essas coisas. Porque a gente não tem tempo de fazer na aula né?! Então quando a gente... em cálculo dois, no semestre que vem, vocês vão começar a falar de funções de duas variáveis, mas vocês vão começar a fazer um monte de cálculo, um monte de técnica, então assim... o que que é isso? Vamos parar para pensar: o que que é domínio? O que que é imagem? O que que é o gráfico? O que que é a partição? Como é que a gente repensa esses elementos, que a gente constrói lá na integral definida, nesse outro contexto? Porque as nossas definições de integral, dupla, derivadas parciais, elas são construídas nesse contexto. Então é essa a ideia da discussão aqui, entendeu?

D: Entendi. Podemos discutir o domínio... podemos discutir... coloquei que o domínio... o... **os domínios são diferentes**. Como é que eu posso chamar esse plano? Plano... pra diferenciar ele, eu esqueci como que se...

I: (inaudível) cartesiano ou r dois. Esse é o r três.

D: **R dois e r três**.

Esse excerto todo foi escolhido pelo fato de os alunos partirem da visualização, como já dito, para fazer conjecturas sobre o domínio. Nesse trecho, quando Danilo percebe que o domínio não permanece o mesmo faz uma afirmação à Cida ao mencionar “o domínio não permanece” e complementa “o mesmo”. Logo, já vemos que houve uma mudança no sistema, ele se desestabilizou ao ter uma tensão entre os sujeitos e o objeto.

A tensão fez o sistema permanecer estático por alguns momentos, até que a comunidade (Cida) juntamente com o artefato *smartphone*, por meio do GeoGebra, que tem característica de *feedback* instantâneo, contribuiu para a moldagem do pensamento dos sujeitos, estimulando a produção de conceitos sobre o domínio por parte dos alunos. Como Borba e Penteado (2010) ponderam: as mídias não apenas substituem ou complementam o pensamento humano, mas estas reorganizam o pensamento.

A sistematização e resolução da tensão ocorrida começa a aparecer quando João esboça algo quando diz “tripla ordenada” e recorre a Cida para que ela o endosse. O indício mais forte de que houve solução aparece quando Íris comenta “do r dois passa para o r três”, sendo seguida pela reflexão de Danilo que diz “os domínios são diferentes” e finaliza com “r dois e r três”. Como não temos as imagens do vídeo no ambiente tridimensional, só podemos dizer que nesse momento os alunos estão colocando essa sistematização em outra tecnologia: papel.

Para entender melhor a discussão, vamos em busca das respostas dos alunos quando organizaram as ideias, a partir das perguntas norteadoras, procurando vestígios do entendimento deles em relação ao domínio.

Imagem 8 – Prints com a respostas dos alunos⁸

1) Como podemos discutir o domínio das funções? Que semelhanças e diferenças você destaca entre eles?

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{no } Df = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{domínio no eixo } x$$

$$g = (x, \frac{1}{x}) \quad Df = \{x, y, z \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

$$f: z = x^2 - 4 \quad Df = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - 4, x, y\}$$

domínio no plano x, y

1) Como podemos discutir o domínio das funções? Que semelhanças e diferenças você destaca entre eles?

$$f(x) = x^2 - 4 \quad Df = \{x \in \mathbb{R}\} \quad \text{em } \mathbb{R}^2$$

Em $\mathbb{R}^3$ $f(x, y) = x^2 - 4$ vai possuir uma tripla ordenada onde $\{x, y \in \mathbb{R}\}$

1) Como podemos discutir o domínio das funções? Que semelhanças e diferenças você destaca entre eles?

O domínios são diferentes, pois o $\mathbb{R}^2$ contém os $\mathbb{R}$. Já o $\mathbb{R}^3$ contém mais que os $\mathbb{R}$.
 As semelhanças: Elas tem a mesma curvatura.
 Diferenças: No $\mathbb{R}^2$ ela é fixa, já no $\mathbb{R}^3$ ela percorre o eixo.

Fonte: dados da pesquisa (RAGONI, 2021).

Vemos, a partir das respostas, transcritas na nota de rodapé em que preferimos preservar tanto a escrita quanto os erros ortográficos, que os alunos chegaram à conclusão de que o domínio de uma função $f(x)$ estará nos números reais, mais especificamente na própria reta numérica. Enquanto que, ao passar para uma função de duas variáveis, $f(x, y)$, o domínio se baseará no próprio plano cartesiano formado pelos eixos x e y , ou seja, além dos números reais que já faziam parte da função de uma variável, agora também “se tem os números reais do eixo y ”, isto é, o $\mathbb{R}^2$.

A partir disso, temos como produto do sistema de atividade do encontro II a “extensão do conceito de domínio de funções de uma variável para funções de duas

⁸ $f(x) = 1/x$ no $Df = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ domínio no eixo x

$z = (x, 1/x)$ $Df = \{x, y, z \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$

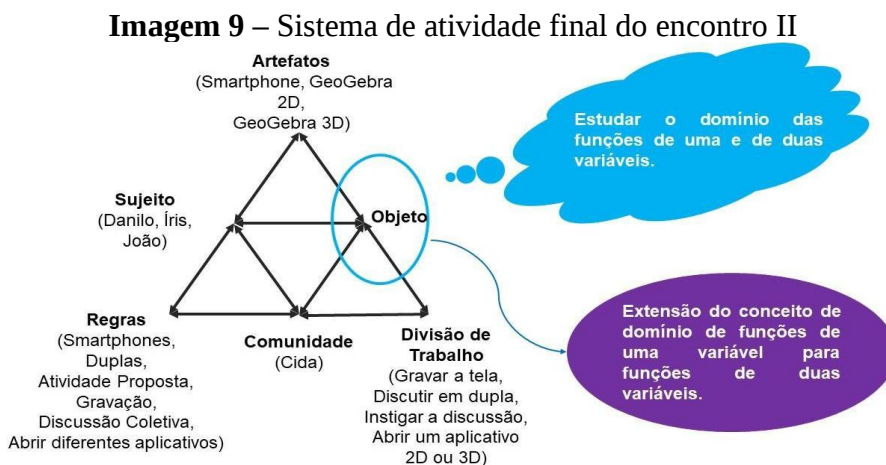
$f: z = x^2 - 4$ $Df = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - 4, x, y\}$ domínio no plano xy .

$f: z = x^2 - 4$ $Df = x \in \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$

Em $\mathbb{R}^3$ $f(x, y) = x^2 - 4$ vai possuir uma tripla ordenada onde $\{x, y \in \mathbb{R}\}$

O domínio são diferentes, pois o $\mathbb{R}^2$ contém os $\mathbb{R}$. Já o $\mathbb{R}^3$ contém mais que os $\mathbb{R}$. As semelhanças: Elas tem a mesma curvatura. Diferenças: No $\mathbb{R}^2$ ela é fixa, já no $\mathbb{R}^3$ ela percorre o eixo.

variáveis”, uma vez que o objeto nessa atividade era “estudar o domínio das funções de uma e de duas variáveis”. Isso se dá pela exploração de tarefas com caráter investigativo com construções próprias dos alunos nos ambientes 2D e 3D no *smartphone*.



Fonte: os autores, 2021.

Apresentamos anteriormente o Sistema de atividade final do segundo encontro em que podemos notar as diferenças do primeiro sistema, no qual o foco era estudar o domínio de funções de uma e duas variáveis, evoluindo, apresentando tensões durante o desenrolar da atividade e chegando ao produto (em roxo) “extensão do conceito de domínio de funções de uma variável para funções de duas variáveis”. Ainda mudamos as cores antes em azul, como João, GeoGebra3D, para evidenciar a estabilização dentro do SA.

CONCLUSÕES

É importante mencionar o papel do artefato *smartphone* (por meio do GeoGebra) de trazer *feedback* imediato e visualização instantânea, proporcionando reflexão e questionamentos que levam os estudantes a fazer testes recorrentes, contestando os pensamentos que tinham até então, o que também leva o sistema se movimentar.

Além disso, por meio da Teoria da Atividade, destacamos que a comunidade, mesmo não tendo o poder de agir sobre o objeto, teve papel de destaque nessa atividade para que os sujeitos pudessem superar tensões. A teoria foi importante ao nos direcionar no momento da análise dos dados e evidenciar pontos importantes do processo de produção de conhecimentos, principalmente ao colocar luz sobre as tensões em que os alunos/sujeitos são levados a se questionar, interrogar outros, inquirir docentes para que avancem na extensão de conceitos fundamentais ao processo de entendimento das funções de duas variáveis, o

que subsidia as integrais duplas (foco do estudo que culminou na dissertação de mestrado do primeiro autor deste trabalho, sob orientação do segundo autor).

Foi possível observar que as tecnologias digitais postas à experimentação e investigação por meio das tarefas exploratórias fizeram o papel de influenciar o pensamento dos sujeitos, não só em mostrar pontos em que estavam tendo “erros”, mas em os fazer questionar o porquê de tais coisas estarem “agindo” como estavam no momento de olhar, por exemplo, para o comando “ $f(x)$ ” sendo estendido para “ $f(x, y)$ ”.

Evidenciamos ainda outras tecnologias que se fizeram presentes durante todo o processo da atividade e que tiveram destaque, como o papel, o lápis e a linguagem. Esta última ainda se desdobrando em alguns tipos, como linguagem escrita, falada, linguagem matemática e a linguagem utilizada pelo aplicativo, digital.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES), - Código de Financiamento 001, e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), a partir da Chamada MCTIC/CNPq nº28/2018 - Processo 426102/2018-5.

REFERÊNCIAS

- BORBA, M. de C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**: Sala de aula e internet em movimento. 1ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.
- BORGES, T. N. Vídeos digitais e o GeoGebra Mobile: possibilidades envolvendo quadriláteros. 2020. 98f. **Dissertação** (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2020.
- CHIARI, A. S. de S. O papel das tecnologias digitais em disciplinas de Álgebra Linear a distância: possibilidades, limites e desafios. 2015. 200f. **Tese** (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2015.
- DANIELS, H. **Vygotsky e a Pesquisa**. São Paulo: Loyola, 2011.
- DURÃES, V. C. Histórias em Quadrinhos e o uso de smartphones nas aulas de Matemática: uma proposta, várias possibilidades!. 2021. 192f. **Dissertação** (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2021.

ENGESTRÖM, Y. Expansive Learning at Work: Toward an activity theoretical reconceptualization. **Journal of education and work**, 2001. p. 133–156.

ENGESTRÖM, Y. **Learning by expanding**: an activity-theoretical approach to developmental research. Helsinki: Orienta-Konsultit, 1987.

ENGESTRÖM, Y.; SANNINO, A. Discursive manifestations of contradictions in organizational change efforts. **Journal of Organizational Change Management**, v. 24 n. 3 p. 368 - 387, 2011.

GALLEGUILLLOS, J. E. B. Modelagem Matemática na Modalidade Online: análise segundo a Teoria da Atividade. 2016. 215f. **Tese** (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro - SP, 2016.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias**: o novo ritmo da informação. 8. ed. Campinas, SP: Papirus, 2012.

RAGONI, V. F. Expandindo Telas e Contando Experiências em Educação Matemática com o GeoGebra - da sensibilidade do toque à produção de conceitos de Integrais Duplas com o *smartphone*. 2021. 143f. **Dissertação** (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande - MS, 2021.

SALMASIO, J. L. Desbloqueando Telas para produzir matemática(s): possibilidades e limites envolvendo Álgebra Linear e *smartphone*. 2020. 126f. **Dissertação** (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande - MS, 2020.

SOARES, D. S.; SOUTO, D. L. P. Tensões no processo de Análise de Modelos em um curso de Cálculo Diferencial e Integral. **REMATEC - Revista de Matemática, Ensino e Cultura**. v. 17, p. 44–74, 2014.

SOUTO, D. L. P. **Transformações expansivas na produção matemática on-line**. São Paulo: Cultura acadêmica, 2014.