REMat
Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional São Paulo

# Elaborar e Resolver Problemas Combinatórios: uma investigação com estudantes de quinto ano do ensino fundamental

**Jose da Silva**[1]
Instituto Federal do Espírito Santo – IFES

## RESUMO

O presente artigo consiste numa investigação sobre a elaboração e resolução de problemas envolvendo o raciocínio combinatório com estudantes de quinto ano do ensino fundamental. O estudo de natureza qualitativa foi desenvolvido sob a perspectiva da Resolução de Problemas. A análise de dados evidenciaram estratégias de resolução sistemática e não sistemática, bem como a influência de estratégias oriundas de orientações dos pesquisadores no processo de desenvolvimento do raciocínio combinatório. Ficou evidente a influência de gostos, preferências e outras ações do cotidiano das crianças no processo de elaboração de problemas. O processo de elaboração de problemas por parte das crianças precisa ser estimulado na sala de aula, porém é imprescindível que seja respeitado as particularidades e os momentos de vida e de maturação de cada indivíduo ao longo desse processo. Acreditamos que outras pesquisas precisam ser desenvolvidas no que concerne a elaboração e resolução de problemas combinatórios com foco no desenvolvimento do raciocínio combinatório tendo novos olhares no que diz respeito a influências cotidianas escolares e não escolares.

**Palavras-chave:** Matemática; Combinatória; Resolução de Problemas; Anos Iniciais; Ensino Fundamental.

## Designing and Solving Combinatorial Problems: an investigation with fifth-year elementary school students

## ABSTRACT

This article consists of an investigation into the elaboration and resolution of problems involving combinatorial reasoning with fifth-year elementary school students. The qualitative study was developed from the perspective of Problem Solving. Data analysis showed systematic and non-systematic resolution strategies, as well as the influence of strategies derived from researchers' guidelines in the process of developing combinatorial reasoning. The influence of tastes, preferences and other actions of children's daily life in the process of elaborating problems was evident. The process of elaborating problems on the part of children needs to be stimulated in the classroom, but it is imperative that the particularities and moments of life and maturation of each individual be respected throughout this process. We believe that further research needs to be developed with regard to the elaboration and resolution of combinatorial problems with a focus on the development of combinatorial reasoning, taking new perspectives with regard to school and non-school everyday influences.

**Keywords:** Mathematics; Combinatorics; Problem solving; Early Years; Elementary School.

## Diseño y resolución de problemas combinatorios: una investigación con estudiantes de quinto año de primaria

## RESUMEN

Este artículo consiste en una investigación sobre la elaboración y resolución de problemas de razonamiento combinatorio con estudiantes de quinto año de primaria. El estudio cualitativo se desarrolló desde la perspectiva de la Resolución de Problemas. El análisis de los datos mostró estrategias de resolución sistemáticas y no sistemáticas, así como la influencia de las estrategias derivadas de las directrices de los

**Submetido em:** 03/03/2023 **Aceito em:** 02/08/2023 **Publicado em:** 07/09/2023

[1] E-mail: thompsonjc0704@gmail.com.

investigadores en el proceso de desarrollo del razonamiento combinatorio. Se evidenció la influencia de los gustos, preferencias y otras acciones del cotidiano de los niños en el proceso de elaboración de los problemas. El proceso de elaboración de problemas por parte de los niños necesita ser estimulado en el aula, pero es imperativo que en todo este proceso se respeten las particularidades y momentos de vida y maduración de cada individuo. Creemos que es necesario desarrollar más investigaciones en lo que respecta a la elaboración y resolución de problemas combinatorios con un enfoque en el desarrollo del razonamiento combinatorio, tomando nuevas perspectivas con respecto a las influencias cotidianas escolares y no escolares.
**Palabras clave:** Matemáticas; Combinatoria; Solución de problemas; Primeros años; Enseñanza fundamental.

## INTRODUÇÃO

Neste artigo, dedicamo-nos a uma tarefa de resolução de problemas aplicada em um experimento de ensino realizado em 2018 com estudantes de quinto ano do ensino fundamental de uma escola pública do município de Vitória no estado do Espírito Santo. A investigação consistiu em analisar as estratégias intuitivas dos alunos, ou seja, suas respostas à referida atividade sem necessariamente advirem de uma instrução sistemática, bem como aquelas sistematizadas, pelo professor ou pesquisador ou pelos próprios colegas, do ponto de vista de estudos da combinatória.

Nossa investigação com as crianças se deu pelo fato de concordarmos com Pessoa e Borba (2009, 2010) que consideram que os problemas de produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação devem ser trabalhados desde os anos iniciais. Em situações que envolvem o raciocínio combinatório, os problemas podem solicitar que sejam listadas as possibilidades de realizar algum tipo de agrupamento ou quantificar o total de possibilidades de realizar um determinado tipo de agrupamento.

Para nós, o raciocínio combinatório é o modo de pensar sobre diferentes estratégias para resolver problemas que envolvem seleção, alocação, partição, enumeração, ordenação, contagem, otimização, classificação, associações entre elementos de um ou mais conjunto e análise de existência de possibilidades mediante certas condições estabelecidas. À medida que desenvolvemos o raciocínio combinatório e alguma capacidade de realizar operações combinatórias, diminuímos algumas dificuldades de enumerar ou contar os números possíveis de casos dados que se podem mesclar e combinar, sem que tenhamos omitido alguma possibilidade que deva ser considerada na solução do problema.

## RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

Nossa base teórica em combinatória e raciocínio combinatório consistiu nos estudos de Borba (2010, 2013), Pessoa e Borba (2009, 2010) e nos trabalhos de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) e Roa (2000), Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991), Bachx, Poppe, Tavares (1975) e Hazzan (1993).

Uma classificação dos problemas combinatórios a partir dos procedimentos de resolução é encontrada nos trabalhos de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) e Roa (2000). Esses primeiros pesquisadores trabalham com o modelo combinatório implícito classificado em seleção, alocação e partição. Roa (2000) acrescenta o composto (problema que envolve mais de um esquema combinatório), ou seja, o enunciado pode envolver seleção e partição, seleção e alocação e assim por diante.

Segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), os problemas de seleção de uma amostra de um conjunto é o tipo de problema que deu origem às noções combinatórias mais primitivas de escolha de objetos e têm grande importância para os estudos de estatística. Portanto, um problema de seleção envolve a escolha, a preferência, a retirada de objetos ou de elementos de um dado conjunto ou a ordenação dos elementos desse conjunto. Um problema de alocação ou de colocação envolve a ideia de colocar, alocar, inserir, depositar ou distribuir objetos em espaços, em vagas ou em casas (células). Já os problemas de partição envolvem a ideia de subdividir os elementos de um conjunto em subconjuntos.

Entre as operações solicitadas em problemas que envolvem o raciocínio combinatório, estão as permutações, que podem ser entendidas como as diferentes formas de ordenar os elementos de um conjunto. Suponhamos que, alguém tenha cinco livros de autores diferentes (Jorge Amado, Machado de Assis, José de Alencar, Graciliano Ramos e Guimarães Rosa) e deseje organizá-los em uma estante, de modo que os livros fiquem um ao lado do outro. De quantas formas isso é possível? Quais são as maneiras de fazer a arrumação? Como cada livro é de autor diferente, a ordem em que eles estiverem arrumados geram novas possibilidades, portanto existem 120 maneiras diferentes de permutar os cinco livros. Agora imaginemos que uma pessoa deseje comprar um sorvete de um determinado sabor (morango, flocos e chocolate) e a pessoa pode comprar em pote ou na casquinha. Quais são as possibilidades? As possibilidades são comprar sorvete de morango no pote ou sorvete de morango na casquinha, comprar sorvete de flocos no pote ou comprar sorvete de flocos na casquinha e assim por diante com os demais sabores. Esse tipo de tarefa envolve a ideia de produto cartesiano, que consiste na construção dos possíveis pares ordenados que você pode formar combinando o sabor do sorvete com o tipo de recipiente (casquinha ou pote).

Ideias como essas estão presentes nos problemas de raciocínio combinatório em que as configurações do conjunto original são alteradas à medida que reagrupamos seus elementos de acordo com os critérios estabelecidos no enunciado (no texto) da tarefa (problema) proposta. Mas como fazer a contagem? Como devemos pensar para chegar aos resultados? Será que um professor pode dialogar, questionar e provocar raciocínios que auxiliem os alunos a pensarem no texto da tarefa, entender o que precisam considerar de critérios estabelecidos sem dizer o que eles devem fazer? Que estratégias ou procedimentos foram adotados para resolver o problema? Além de entendermos o que é a combinatória, interessa-nos saber como alunos desenvolvem o raciocínio combinatório pelo viés da resolução de problemas. Sobre o raciocínio combinatório, Borba (2010), define-o como

> [...] um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar os elementos destes, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis. Este modo de pensar é útil no cotidiano – por estar presente em situações variadas como organizações de equipes, de campeonatos esportivos, de cardápios etc. – bem como é aplicado em variadas áreas do conhecimento – tais como Biologia, Química, Estatística, Ciências da Computação dentre outras – em situações classificatórias, por exemplo. O desenvolvimento do raciocínio combinatório, portanto, é de extrema relevância e deve ser alvo do ensino formal na Educação Básica (BORBA, 2010, p. 3).

O raciocínio combinatório está presente não só em situações escolares, mas também no cotidiano das pessoas desde a infância. De forma semelhante Pessoa e Borba (2009) nos informam o que concebem como raciocínio combinatório. Essas autoras entendem o raciocínio combinatório como um modo de pensar presente na análise de situações em que elementos de determinados conjuntos devem ser agrupados atendendo a critérios específicos de escolha e/ou ordenação. Além disso, o número de agrupamentos possíveis pode ser determinado de forma direta contando os casos um a um ou de forma indireta por meio de um cálculo específico. O raciocínio combinatório exige uma forma de pensar em que as ideias sejam encadeadas e contribuam para a organização do pensamento de modo que seja possível obter de forma direta ou indireta as possibilidades solicitadas num problema. De acordo com Dewey (1979), há quatro sentidos diferentes para a palavra pensamento. O primeiro está relacionado ao que se passa na nossa mente, em nossos sonhos e devaneios, ou seja, ideias desordenadas que passam pela nossa cabeça de forma desregrada. O segundo refere-se a uma atividade mental de representação consciente, mas as ideias não se apresentam numa sequência ordenada. Neste caso, as ideias não se apoiam nas anteriores ou em algo a elas relacionado. Podemos pensar em vários casos, mas que não estejam relacionados entre si. Outro sentido de pensamento que encontramos em Dewey (1979) trata do pensamento encadeado, ou seja, as ideias são representações mentais oriundas de uma cadeia sucessiva de reflexões que derivam de conexões estabelecidas de forma lógica entre as ideias.

A sequência de ideias encadeadas possibilita chegar a um alvo (ou a um propósito estabelecido). Encontramos ainda em Dewey (1979) outro sentido para pensamento: a crença. Temos a crença primitiva, que pode estar fundamentada naquilo que é evidenciado no que podemos ver (ou seja: uma evidência não examinada ou não investigada). A crença posterior apoia-se num estudo cuidadoso, mais amplo e intencional sobre o aspecto que se deseja observar, fazendo verificações e análises de possíveis resultados em comparação com outras crenças. Isto é um processo de investigação. Por fim, o pensamento reflexivo, que, segundo Dewey (1979), apresenta cinco fases, a saber:

> (1) as sugestões, nas quais o espírito salta para uma possível solução; (2) uma intelectualização da dificuldade ou perplexidade que foi sentida (diretamente experimentada) e que passa, então, a constituir um problema a resolver, uma questão cuja resposta deve ser procurada; (3) o uso de uma sugestão em seguida a outra, como ideia-guia ou hipótese, a iniciar e guiar a observação e outras operações durante a coleta de fatos; (4) a elaboração mental da ideia ou suposição, como ideia ou suposição (raciocínio, no sentido de parte da inferência e não da inferência inteira); e (5) a verificação da hipótese, mediante ação exterior ou imaginativa (DEWEY, 1979, p. 111-112).

Estes tipos de pensamentos apresentados por Dewey têm ligação com o que os pesquisadores espanhóis discutem em seus trabalhos sobre sistematização e não sistematização de estratégias intuitivas de alunos ao resolverem problemas combinatórios. Quando o aluno dá alguma resposta que aparentemente pode não ter nenhum sentido com o que é solicitado no problema de combinatória, tal resposta pode ser apenas um devaneio. Quando apresenta uma resposta incompleta sem sistematização o pensamento pode ser desordenado sem que as ideias estejam apoiadas nas anteriores. Já no pensamento sistemático as ideias apoiam-se nas anteriores de modo que os alunos consigam encontrar todas ou quase todas as possibilidades. Em situações que envolvem o raciocínio combinatório, os problemas podem solicitar que sejam listadas as possibilidades de realizar algum tipo de agrupamento ou quantificar o total de possibilidades de realizar um determinado tipo de agrupamento. Além disso, podem exigir a recursividade ou uma generalização dos procedimentos de resolução, e, dependendo da estrutura da tarefa, é necessário o desenvolvimento de diferentes técnicas de contagem e isso exige sempre a reflexão dos sujeitos em verificar se sua resposta atende ao que está sendo solicitado no problema.

## RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nosso trabalho foi desenvolvido sob a perspectiva da resolução de problemas com base em Polya (1995), Lester (1987), Santos (1997), Santos-Wagner (2008), Hoffman e Santos-Wagner (2011) e Onuchic e Allevato (2004, 2011), D'Ambrosio (2017) e de possíveis obstáculos com base em Brosseau (1976).

Segundo Vale, Pimentel e Barbosa (2015), a investigação em resolução de problemas de matemática iniciou-se sob a influência de Polya com o seu trabalho ''How to solve it'', publicado em 1945. Em seu trabalho, Polya já discutia sobre como resolver problemas matemáticos, e, com base em sua obra, outros educadores matemáticos focalizaram estudos sobre

> [...] o modo como os alunos talentosos resolviam problemas (e.g. Anderson, Boyle & Reiser, 1985), sobre o ensino de estratégias de resolução (heurísticas) e processos metacognitivos (e.g. Charles & Silver, 1988; Lester, Garofalo & Kroll, 1989; Schoenfeld, 1992), e, mais recentemente, sobre a relação com a modelação matemática (e.g. English et al., 2008) (VALE; PIMENTEL; BARBOSA, 2015, p. 40).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) da 1.ª à 4.ª série já estabeleciam que, em matemática, os resultados de desempenho dos alunos em geral eram insatisfatórios e davam maior destaque a questões envolvendo procedimentos e resolução de problemas. Esse documento também argumenta, ainda, que "[...] o ensino da matemática ainda é feito sem levar em conta os aspectos que a vinculam com a prática cotidiana, tornando-a desprovida de significado para o aluno" (BRASIL, 1997, p. 24).

O ensino de matemática utilizando situações que envolvem aplicar conhecimentos adquiridos em anos anteriores e ao alcance dos alunos gerou debates sobre o ensino desde a resolução de problemas. Como eixo organizador do ensino e da aprendizagem matemática, de acordo com o documento dos PCN (BRASIL, 1998), a resolução de problemas é importante por servir: 1) como ponto de partida para o ensino e aprendizagem de conceitos e métodos matemáticos; 2) como forma de estruturação matemática por meio da interpretação do enunciado; 3) como uma forma de articular conceitos matemáticos com outros já aprendidos; 4) como um meio de promover o estudo de generalizações e; 5) como uma orientação para a aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

De acordo com Onuchic (1999), não havia concordância quanto à maneira pela qual se obteriam bons resultados com o ensino de matemática apoiada na resolução de problemas. Não existiam coerência e clareza no rumo desse processo para alcançar o objetivo de ensino. Contudo, tais diferenças de concepções sobre o significado de resolução de problemas permitiram que pesquisadores desenvolvessem trabalhos que atendessem a recomendações da matemática escolar estabelecidas pelo National Council of Teachers of Mathematics (NTCM). Onuchic e Allevato (2011) dizem que, na década de 1980, educadores matemáticos buscaram, por meio da resolução de problemas, desenvolver o ensino e a aprendizagem dos alunos que favorecessem a compreensão de significados matemáticos.

Em 1980, o National Council of Teachers of Mathematics publicou um documento sobre recomendações para o ensino, o qual indicava que a resolução de problemas deveria ser foco da matemática escolar. Iniciou-se, então, a fase da resolução de problemas, que, de acordo com Onuchic e Allevato (2011, p. 78), esteve apoiada no "[...] construtivismo e na teoria sociocultural, que tem Vygotsky como principal teórico [...]". A fase inicial esteve voltada para os processos do pensamento matemático e da aprendizagem por descoberta via resolução de problemas, o que contribuiu para desenvolver recursos didáticos na forma de coleções de exercícios, desenvolvimento de estratégias, atividades e orientações sobre a avaliação do desempenho dos alunos nesse campo de estudo.

Segundo Santos-Wagner (2008) e Onuchic e Allevato (2011), em 1989 Schroeder e Lester apresentaram três modos de abordar a resolução de problemas em sala de aula. O primeiro trata de ensinar sobre resolução de problemas. Aqui o professor ensina as diferentes estratégias para resolver problemas e procura incentivar os alunos a aprenderem essas estratégias de resolução de problemas e a discutirem sobre como resolveram alguns problemas. No segundo modo trata-se de ensinar matemática para resolver problemas. O professor preocupa-se em introduzir e explorar novos conceitos e procedimentos matemáticos que serão trabalhados posteriormente na resolução de problemas. E por fim, ensinar matemática por meio da resolução de problemas, em que problemas são valorizados não apenas como o propósito final de aprendizagem em matemática, mas como um meio de fazer matemática e de evidenciar conceitos matemáticos durante o processo de resolução. Nesse caso, o professor inicia a aula de matemática com um problema que quando resolvido vai servir de base para que o professor sistematize com alunos conceitos matemáticos que foram identificados no processo de resolver este problema. É com base nessas concepções que buscamos desenvolver nosso trabalho, pois, de acordo com Santos (1997), Santos-Wagner (2008), Onuchic (1999) e Onuchic e Allevato (2004, 2011), o ideal é que estas três abordagens didáticas sejam exploradas pelos professores em aulas de matemática. Diante do exposto, entendemos que são necessárias diversas habilidades para compreender conceitos matemáticos. Portanto, é imprescindível que, ao resolver um problema, o aluno saiba questionar esse problema, identificar seus dados, transformá-los em informações necessárias para a resolução (ou reformulação de novos problemas) e verificar a própria resposta. Isso contribui para uma aprendizagem reflexiva, e não apenas reprodutora de procedimentos.

## METODOLOGIA

Optamos, em nossa pesquisa, por uma abordagem qualitativa, uma vez que a base de sua elaboração é constituída principalmente pela percepção e compreensão (STAKE, 2008). Sob uma perspectiva qualitativa, interpretativa e naturalista (FIORENTINI; LORENZATO, 2012), esta pesquisa teve como público estudantes de uma turma de 28 alunos do turno matutino do quinto ano do ensino fundamental de uma escola pública municipal de Vitória. Para análise de dados consideramos participantes da pesquisa, apenas 15 estudantes com idades de 10 e 11 anos (11 meninas e 4 meninos), cujos pais e/ou responsáveis concordaram com a participação e assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE). Ressaltamos que os nomes dos sujeitos utilizados neste trabalho são fictícios e escolhidos pelas próprias crianças.

Com base nesses aspectos supracitados, realizamos uma investigação do tipo experimento de ensino com base em Steffe e Thompson (2000), em que buscamos compreender a matemática dos estudantes. Para estes autores, as crianças apresentam e constroem uma matemática que é própria delas, e por isso, é importante ouvi-las, para compreender o que elas fazem, como fazem e por que fazem de tal forma, de modo que possamos entender as relações matemáticas que as crianças constroem ao resolverem problemas matemáticos.

Durante o experimento de ensino, utilizamos a observação participante e entrevistas com as crianças para a coleta de dados. Escutamos as crianças durante as aulas, observarmos como se relacionavam umas com as outras e com a professora. Quanto às entrevistas, elaboramos perguntas investigativas semiestruturadas para esclarecer e refinar informações e interpretações dos dados da pesquisa. Para registrarmos os dados, utilizamos o diário do pesquisador e gravações de áudio. Em cada etapa de escrita, buscamos evidências que conduzissem à compreensão e à melhor assertiva, considerando a questão de pesquisa: Que estratégias alunos do quinto ano utilizam para elaborar e resolver um problema que envolve o raciocínio combinatório?

Analisamos as respostas das crianças à tarefa de resolução da seguinte forma: a) analisamos as falas dos alunos durante a aplicação da tarefa em sala de aula; b) analisamos as soluções das crianças na ficha de elaboração e resolução de problema e apresentação das soluções. Realizamos entrevistas individuais a fim de compreendermos as respostas dos mesmos que diferenciavam das soluções previstas pelos pesquisadores.

Nesse processo de discussão dos dados, utilizamos as seguintes categorias de análise: estratégias de enumeração (sistemática completa, sistemática incompleta, não sistemática completa e não sistemática incompleta) e estratégias de contagem, além de verificarmos se as soluções eram dadas por desenho, listagem, cálculo, tabela ou alguma outra estratégia. Tais resultados serão discutidos na próxima seção.

Nesta etapa da pesquisa, os alunos já haviam estudado outros conteúdos matemáticos como sistema de numeração, operações matemáticas de adição, subtração, multiplicação e divisão, e estavam sendo influenciado pelas nossas estratégias de resolução de problemas e pelas estratégias da professora e de outros colegas desde março quando iniciamos o experimento de ensino explorando outros problemas de combinatória.

Esta tarefa de elaboração de problemas foi realizada em 29 de junho de 2018, ou seja, três meses depois de termos iniciado o nosso experimento de ensino com outros problemas envolvendo o raciocínio combinatório. Recordamos oralmente as tarefas: (1) do dominó; (2) das barrinhas; (3) dos dados; (4) da pintura da casinha; (5) da organização de pessoas na fila e; (6) da organização de figuras geométricas que haviam sido exploradas em momentos anteriores a este. Desenhamos no quadro algumas estratégias que eles haviam feito de forma correta e incorreta nas tarefas de pesquisa.

## ANÁLISES E RESULTADOS

Passados cerca de 30 minutos de retorno e de conversa com os alunos sobre os problemas matemáticos explorados em sala envolvendo o raciocínio combinatório, entregamos uma folha com a tarefa de elaboração de problemas a cada aluno. Fizemos a leitura individual e coletiva, além de discutirmos algumas ideias para elaboração dos problemas. Por exemplo, conversamos com os alunos sobre um problema que poderia ser elaborado com sete pessoas para distribuir em dois elevadores, ou distribuir sete carrinhos entre duas caixas, ou escrever o total sete como sendo a soma de duas parcelas. Também discutimos sobre ideias de ordenação, como por exemplo, organizar pessoas em uma competição de corrida (em primeiro, segundo e terceiro lugares) ou pintar as faixas de uma bandeira. Optamos por dar algumas ideias de elaboração de tarefas, pois sabemos que isto não é trivial para os alunos. A tarefa que entregamos tinha o seguinte enunciado:

a) Elabore e resolva um problema semelhante ao problema do dominó, ou ao problema das barrinhas, ou ao problema dos dados, com o total da soma igual a sete. Explique como você pensou para resolver.

b) Elabore e resolva um problema semelhante ao da pintura da casa, ou ao problema da organização das pessoas na fila, ou ao da organização das figuras geométricas.

Esperávamos que os alunos pudessem elaborar e resolver uma tarefa com o mesmo modelo combinatório implícito de partição na tarefa da letra (a) e com o modelo combinatório implícito de alocação na tarefa da letra (b). Além disso, esperávamos que respeitassem o parâmetro estabelecido (com o total sete) na letra (a) e os parâmetros de ordenação e de não repetição de elementos na tarefa da letra (b) e que explorassem a enumeração e a contagem no enunciado. Nesta etapa de pesquisa investigamos as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver as questões elaboradas por eles. Veja as categorizações apresentadas nos quadros a seguir (Quadro 01 e 02) dos dados de treze dos quinze alunos que conforme já mencionamos os seus responsáveis deram consentimento para participarem da pesquisa.

**Quadro 01 -** Categorização das tarefas elaboradas pelos alunos em relação ao problema de adição com a ideia de partição

<table>
<tr><th colspan="3">Quanto ao uso do modelo combinatório implícito de partição</th></tr>
<tr><th>Atendeu ao modelo de partição com enunciado</th><th>Atendeu ao modelo de partição, mas não elaborou enunciado do problema</th><th>Iniciou a elaboração, mas não conseguiu concluir a escrita do problema</th></tr>
<tr><td>Cláudia, Estela, Flora, Lipinho, Malves, Manuela, Mel, Moranguinho, Pérola e Sol</td><td>Gonçalves<br>Red</td><td>Athayde</td></tr>
<tr><th colspan="3">Estabelecimento de parâmetros com o total sete</th></tr>
<tr><th>Respeitou o parâmetro estabelecido com total sete</th><th>Não respeitou o parâmetro estabelecido</th><th>Não foi possível identificar</th></tr>
<tr><td>Cláudia, Estela, Flora, Gonçalves, Lipinho, Malves Manuela, Mel, Moranguinho, Pérola e Sol</td><td>Red</td><td>Athayde</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="5">Quanto ao tipo de solução solicitada no enunciado</th></tr>
<tr><th>Enumeração de possibilidades</th><th>Contagem de possibilidades</th><th>Enumeração e contagem de possibilidades</th><th>Outro tipo de contagem</th><th>Não solicitou (ausência de enunciado)</th></tr>
<tr><td>Estela, Manuela, Mel e Moranguinho</td><td>Flora, Malves e Sol</td><td></td><td>Lipinho</td><td>Athayde, Gonçalves e Red</td></tr>
<tr><th colspan="5">Quanto ao tipo de estratégia de resolução</th></tr>
<tr><th>Visual (desenho, diagramas, gráficos)</th><th>Explorou solução verbal (oral, escrita)</th><th>Explorou solução analítica (numérica, algébrica)</th><th>Não explicitou (ficou em aberto)</th><th>Não elaborou enunciado</th></tr>
<tr><td>Moranguinho<br>Mel</td><td></td><td>Estela, Flora, Manuela e Pérola</td><td>Lipinnho, Malves e</td><td>Athayde<br>Gonçalves</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>Sol</td><td>Red</td></tr>
<tr><td colspan="5">Tipo de operação, cálculo ou técnica combinatória com base na estrutura do problema</td></tr>
<tr><td>Combinação completa explorando soluções inteiras não negativas</td><td colspan="2">Estela, Flora, Malves, Manuela, Mel e Sol</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Combinação completa explorando soluções inteiras positivas</td><td colspan="2">Cláudia e Pérola</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Princípio aditivo</td><td colspan="2">Moranguinho e Lipinho</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Não elaborou enunciado de problema</td><td colspan="2">Athayde, Gonçalves e Red</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

**Fonte:** Elaborado pelos pesquisadores

Fizemos várias leituras e releituras dos problemas elaborados pelos alunos, dos estudos teóricos de raciocínio combinatório e depois procuramos identificar se as tarefas estavam relacionadas com o modelo combinatório implícito que trabalhamos no experimento de ensino, se sugeriam ou não algum tipo de estratégia de resolução no enunciado. Se os problemas atendiam ao parâmetro com total sete na questão aditiva e se era ordenado na questão multiplicativa. Estas análises nos possibilitaram construir estes quadros.

**Quadro 02** - Categorização das tarefas elaboradas pelos alunos em relação ao problema de multiplicação com a ideia de alocação

<table>
<tr><td colspan="3">Quanto ao uso modelo combinatório implícito de alocação</td></tr>
<tr><td>Atendeu ao modelo de alocação com enunciado</td><td>O problema não envolveu o modelo combinatório implícito</td><td>Não elaborou problema, apenas desenhou possibilidades respeitando o modelo de alocação</td></tr>
<tr><td>Athayde, Cláudia, Estela Flora, Lipinho, Malves Manuela, Mel, Moranguinho Pérola e Sol</td><td>Red</td><td>Gonçalves</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">Estabelecimento de parâmetros de ordenação e repetição de elementos</td></tr>
<tr><td>Ordenado sem repetição de elementos</td><td>Ordenado com repetição de elementos</td><td>Não elaborou problema</td><td>O problema não se aplicou ao modelo combinatório implícito</td></tr>
<tr><td>Estela, Flora, Lipinho, Malves Manuela, Mel, Moranguinho Pérola e Sol</td><td>Cláudia e Athayde</td><td>Gonçalves</td><td>Red</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="5">Quanto ao tipo de solução solicitada no enunciado</td></tr>
<tr><td>Enumeração de possibilidades</td><td>Contagem de possibilidades</td><td>Enumeração e contagem de possibilidades</td><td>Outro tipo de problema</td><td>Não solicitou (ausência de enunciado)</td></tr>
<tr><td>Cláudia, Estela, Mel e Moranguinho</td><td>Athayde, Flora Malves, Manuela e Pérola</td><td>Sol<br>Lipinho</td><td>Red</td><td>Gonçalves</td></tr>
</table>

| **Quanto ao tipo de estratégia de presente no enunciado** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Visual (desenho, diagramas, gráficos)** | **Explorou solução verbal (oral, escrita)** | **Explorou solução analítica (numérica, algébrica)** | **Não explicitou** | **Não elaborou enunciado** |
| Athayde, Cláudia, Flora, Manuela e Sol | Estela, Lipinho<br><br>Malves, Moranguinho e Pérola | Mel | Red | Gonçalves |

| **Tipo de operação, cálculo ou técnica combinatória com base na estrutura do problema** | | |
|---|---|---|
| **Permutação simples** | Estela, Flora, Lipinho Malves, Mel, Moranguinho, Pérola e Sol | |
| **Combinações completas ou combinação com repetição** | Cláudia Athayde | |
| **Permutação caótica** | Manuela | Gonçalves – não elaborou o problema, mas pintou a bandeira do Brasil com esta estrutura |
| **Nenhuma categoria de operação combinatória** | Red | |

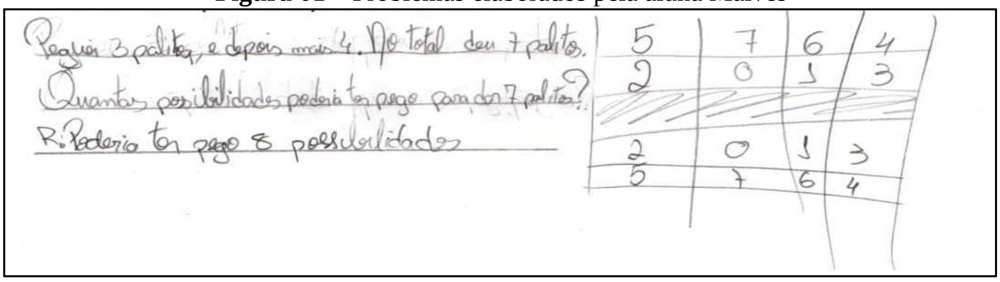
**Fonte:** Elaborado pelos pesquisadores

Notamos que de um modo geral os alunos conseguiram elaborar problemas envolvendo o raciocínio combinatório, embora alguns tenham tido dificuldade para escrever enunciados. Verificamos também que os problemas elaborados pelos alunos têm potencial para construir diálogos sobre outros tipos de ideias combinatórias envolvendo diferentes parâmetros, seja de ordenação, de partição entre outros. A seguir apresentamos os problemas e a análise sobre os mesmos exemplificando as categorias que colocamos nos quadros de acordo com o que estudamos da teoria de combinatória, das orientações dos documentos do PCN e da BNCC.

## Problemas elaborados por Malves

Malves elaborou o problema da seguinte forma: Peguei 3 palitos e depois mais 4. No total deu 7 palitos. Quantas possibilidades poderia ter pegado para dar 7 palitos?

**Figura 01 –** Problemas elaborados pela aluna Malves



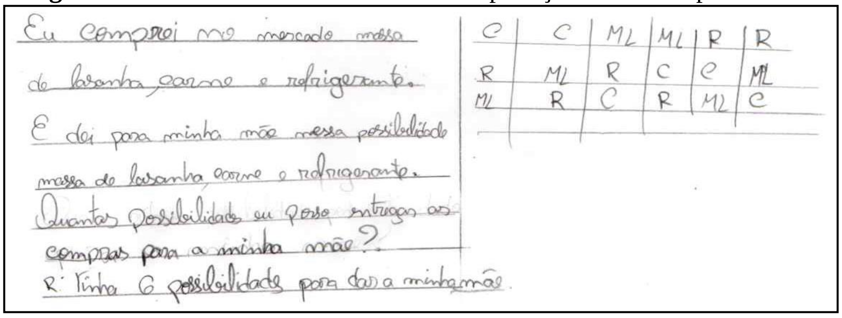

**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores (2018)

Em relação ao modelo combinatório implícito, o problema elaborado por Malves atendeu ao modelo de partição, respeitou o parâmetro com o total sete e explorou no enunciado a contagem de possibilidades. A aluna usou a propriedade comutativa e a propriedade do elemento neutro da adição para encontrar as possibilidades, colocando os valores num quadro. Notamos que o problema elaborado pela aluna está de acordo com o modelo combinatório implícito de partição e atendeu ao parâmetro estabelecido com o total sete. Além disso, o enunciado explorou a contagem de possibilidades e deixou em aberto o tipo de estratégia que poderia ser utilizada, seja por desenho, seja por solução numérica, algébrica ou verbal.

A estratégia de resolução de Malves, usando o quadro, foi semelhante ao modo como ela resolveu os problemas em que organizou as pessoas na fila e organizou as figuras geométricas (tarefas (2) e (3) dos problemas de multiplicação com ideia de alocação). Essa mesma estratégia foi utilizada no problema elaborado com a ideia de multiplicação. A aluna deu indício de que se apropriou desse tipo de estratégia e iniciou o desenvolvimento de pensamento sistemático, fixando uma das variáveis do problema e alternando as demais variáveis.

A mesma aluna elaborou o seguinte problema de multiplicação com a ideia de alocação: *Eu comprei no mercado massa de lasanha, carne e refrigerante. E dei para minha mãe nessa possibilidade: massa de lasanha, carne e refrigerante. Quantas possibilidades eu posso entregar as compras para a minha mãe?*

**Figura 02 –** Problema com a ideia de multiplicação elaborado por Malves


Eu comprei no mercado massa de lasanha carne e refrigerante. E dei para minha mãe nessa possibilidade massa de lasanha carne e refrigerante. Quantas possibilidade eu posso entregar as compras para a minha mãe?
R: Tinha 6 possibilidade para dar a minha mãe.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| C | C | ML | ML | R | R |
| R | ML | R | C | C | ML |
| ML | R | C | R | ML | C |

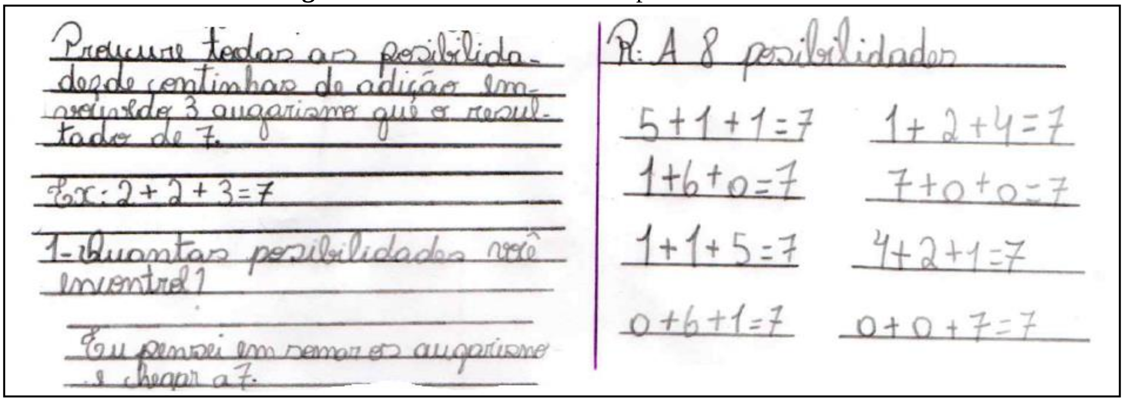
**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores (2018)

Malves atendeu ao modelo combinatório implícito de alocação, respeitando os parâmetros de ordenação e não repetição de elementos. Além disso, explorou a contagem no enunciado do problema. Em ambos os problemas, a aluna enumerou as possibilidades usando a ideia de quadro e, por meio da enumeração, fez a contagem total. Notamos que desenhos, listagens sistemáticas e quadros podem ser mais bem explorados por professores sem apressar os alunos do quinto ano a usar mecanicamente a operação de multiplicação no processo de contagem sem compreender esse procedimento na contagem de possibilidades.

**Problemas elaborados por Manuela**

O problema de adição elaborado pela aluna Manuela foi este: *Procure todas as possibilidades de continhas de adição envolvendo 3 algarismos que o resultado dê 7.*

**Figura 03 –** Problema elaborado pela aluna Manuela

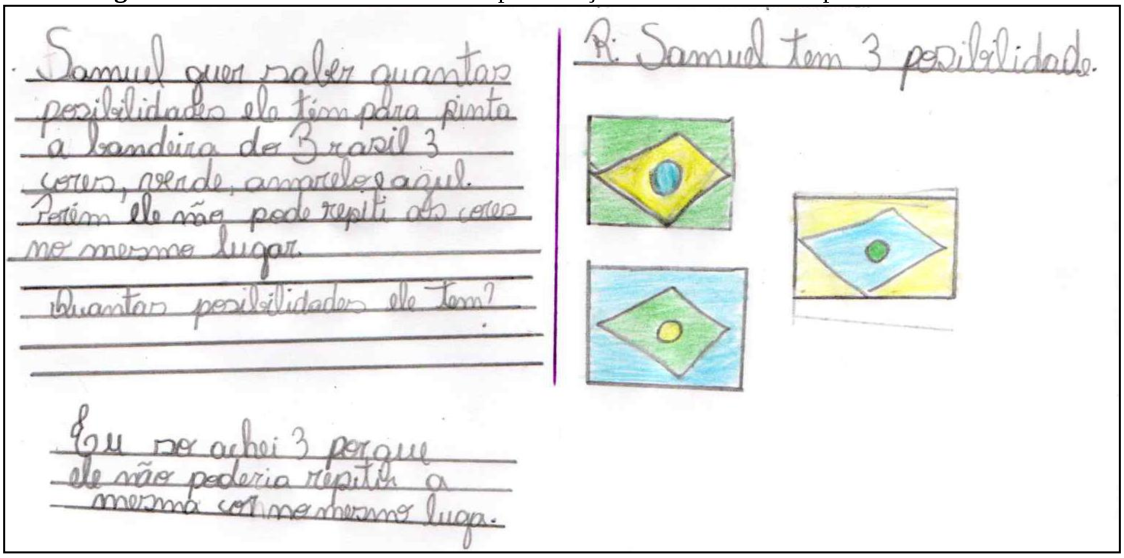



**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores

A aluna Manuela elaborou um problema mais complexo do que o explorado nas tarefas do dominó, das barrinhas e dos dados, pois envolve tripartições do número sete, com o total de possibilidades igual a 36. Em outras palavras, consiste em encontrar as soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 7$. Como o número de soluções é maior que dez, exige uma sistematização mais aprimorada dos alunos no processo de resolução. Embora a aluna tenha encontrado apenas oito do total de soluções possíveis e não tenha contado com a solução presente no enunciado, já demonstra indícios de um raciocínio combinatório que atenta para os parâmetros estabelecidos e o modelo combinatório implícito.

Notamos que o problema de Manuela está de acordo com o modelo de partição e com o parâmetro cujo total é sete. Além disso, explorou a enumeração de possibilidades no enunciado e solicitou uma estratégia por meio de cálculos de adições. Na letra (b), a aluna elaborou um problema que usa a ordenação de elementos distintos e sua colocação em espaços distintos. O problema elaborado pela aluna foi este: *Samuel quer saber quantas possibilidades ele tem para pintar a bandeira do Brasil com três cores: verde, amarelo e azul. Porém, ele não pode repetir as cores no mesmo lugar. Quantas possibilidades ele tem?*

**Figura 04 –** Problema com a ideia de permutação caótica elaborado pela aluna Manuela




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores (2018)

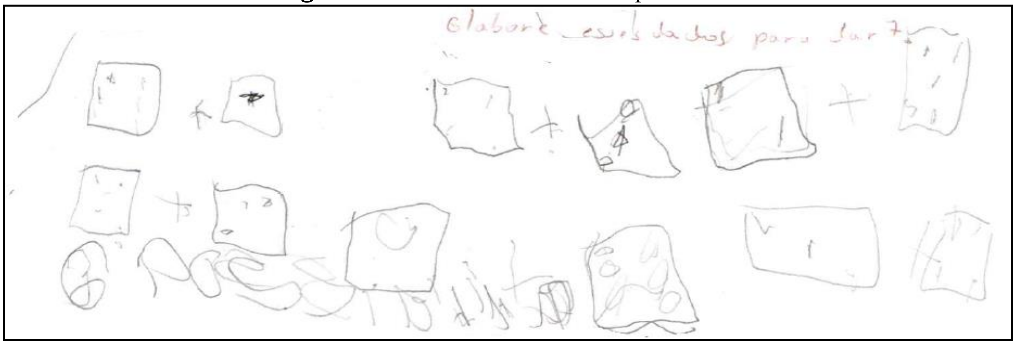
Embora pareça um problema de fácil resolução, classifica-se como uma situação cuja resolução envolve o conceito da operação de permutação caótica, pois os elementos não podem ficar em seu local de origem nas novas alocações realizadas. Quanto ao modelo combinatório implícito, o problema classifica-se dentro da alocação, mas difere nas técnicas ou operações combinatórias, uma vez que a resposta não pode ser obtida com a aplicação direta do princípio multiplicativo. Outra semelhança com a tarefa que propusemos para os alunos está relacionada ao critério de ordenação e de não repetição de elementos, visto que a ordem em que os elementos são alocados gera novas possibilidades e restringe a possibilidade de repetir cores. Em ambos os problemas, Manuela realizou a contagem usando o processo de enumerar as possibilidades.

## Problemas elaborados por Cláudia

No dia da realização da tarefa de elaboração de problemas, a aluna Cláudia estava com o braço direito engessado e tentou fazer a tarefa com a mão esquerda. Os problemas elaborados pela aluna foram os seguintes:

*Elabore esses dados para dar 7.*

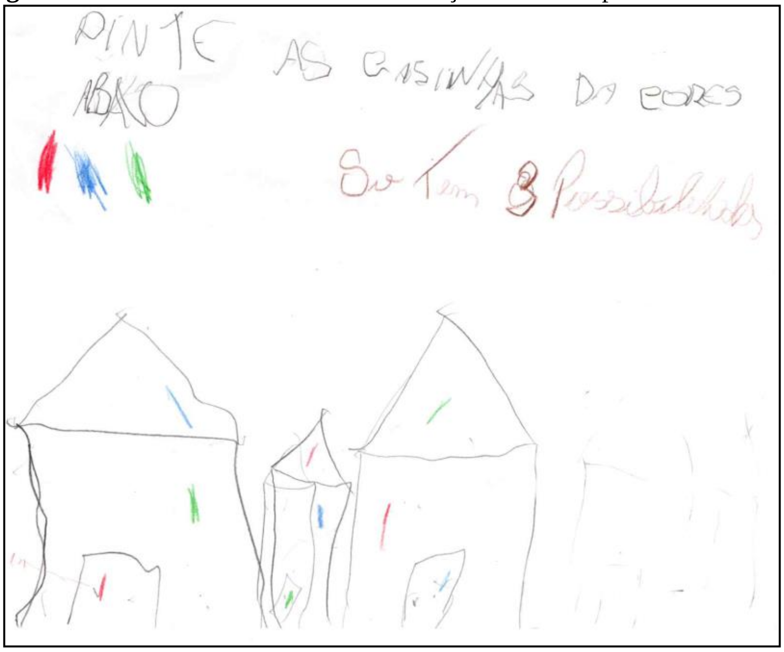
**Figura 05 –** Problema elaborado pela aluna Cláudia



**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores (2018)

*Pinte as casinhas com as cores abaixo (vermelho, azul e verde).*

**Figura 06 –** Problema com a ideia de alocação elaborado pela aluna Cláudia



**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores (2018)

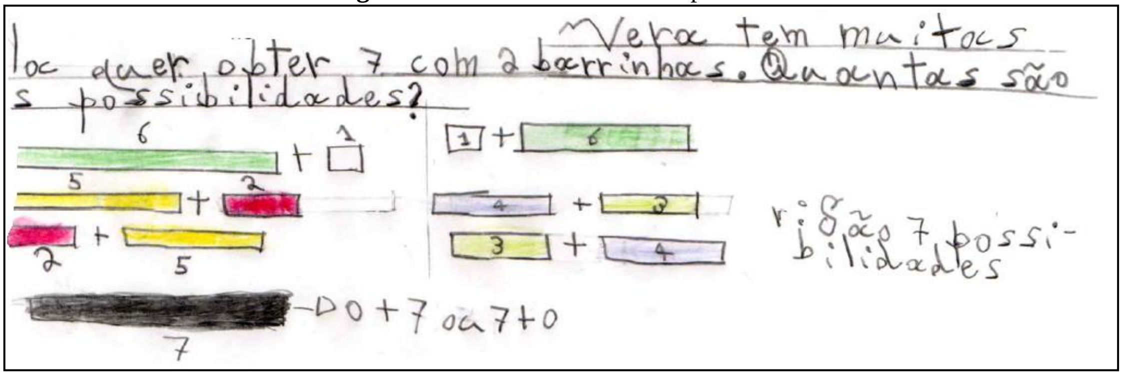
No problema (a), Cláudia elaborou uma tarefa semelhante à dos dados para o problema da soma com a ideia de partição. Ela atendeu ao modelo combinatório implícito, respeitou o parâmetro com o total sete e solicitou a enumeração de possibilidades. No segundo problema, também atentou para o modelo combinatório implícito de alocação. Porém, o enunciado não restringiu o critério de repetição de elementos. A falta de sistematização e a troca simultânea das cores nos espaços da casa dificultaram que Cláudia encontrasse todas as soluções possíveis, mas um dos fatores que levaram a isso pode ter sido a situação de incômodo em que a aluna se encontrava com o braço engessado. Portanto, pela estrutura do enunciado, esse problema da casinha elaborado por Cláudia pode ser classificado dentro das operações de combinação com repetição ou combinações completas.

Cláudia encontrou três maneiras de pintar a casinha com as cores azul, verde e vermelha, mas percebemos, durante a aplicação da tarefa, que ela estava de certa forma indisposta a realizar a tarefa, por não poder escrever com a mão direita, com a qual realizava as tarefas de escrita cotidianamente. Talvez isso explique o fato de a aluna não ter conseguido escrever um enunciado claro e o fato de não realizar um tipo de sistematização ao resolver o problema.

**Problemas elaborados pela aluna Sol**

A aluna Sol elaborou um problema semelhante ao das barrinhas com o total sete e desenhou as possibilidades de forma sistemática, usando a comutatividade da adição para encontrar as possibilidades. Embora tivesse escrito oito somas com o total sete, a aluna considerou apenas as soluções desenhadas por ela. O enunciado do problema foi o seguinte: *Vera tem muitas barrinhas. Ela quer obter 7 com 2 barrinhas. Quantas são as possibilidades?*

**Figura 07 –** Problema elaborado pela aluna Sol




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores (2018)

De acordo com o que se pede no problema, a aluna escreveu um enunciado que tem relação com o modelo combinatório implícito de partição, semelhante ao que havíamos trabalhado nas tarefas com a ideia de adição. Estabeleceu o parâmetro com o total sete e solicitou a contagem das possibilidades, que foi realizada com base nas enumerações (desenho e numérica). Em relação ao tipo de operação, ele envolve a ideia de combinações completas explorando soluções inteiras não negativas, isto é, quando o zero faz parte do conjunto de elementos de contagem.

O segundo problema elaborado por Sol, usando figuras geométricas como o pentágono, o hexágono e o losango, foi semelhante à tarefa das figuras geométricas que havíamos trabalhado com eles: *Letícia quer saber se pode ter 6 possibilidades com essas 3 formas? Será que dá certo?*

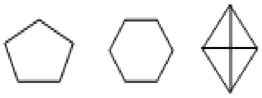
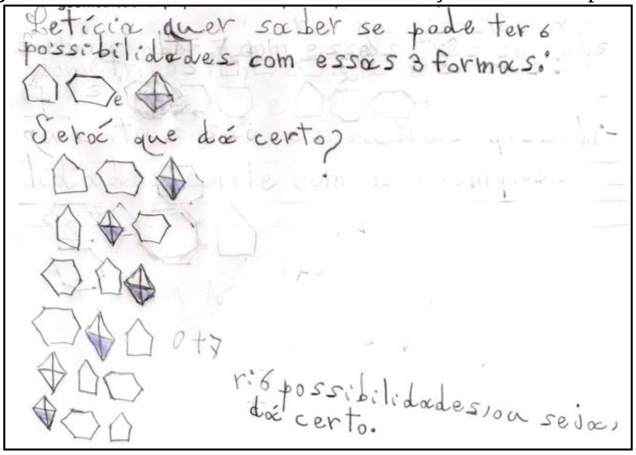


**Figura 08 –** Problema com a ideia de alocação elaborado por Sol




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores (2018)

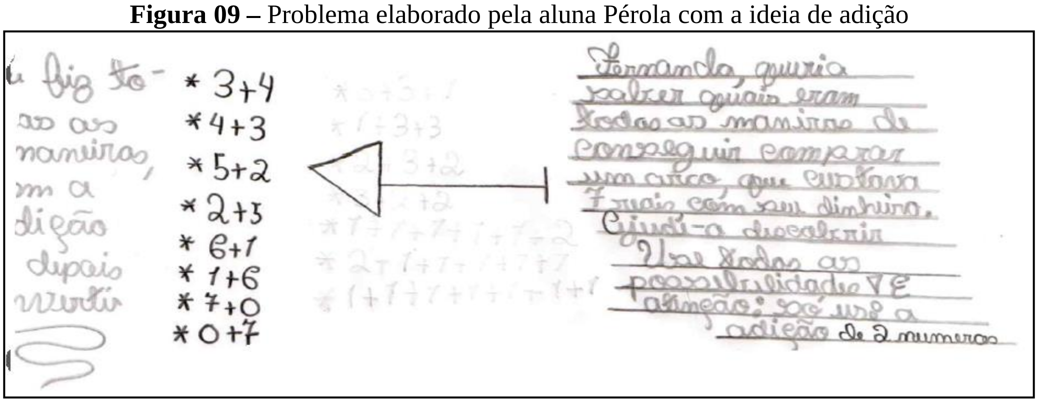
Ao analisarmos o enunciado do problema, verificamos que atende ao modelo de alocação e já anuncia o possível total de possibilidades, solicitando que seja verificado esse total construindo as enumerações. Sol desenhou as sequências com as figuras geométricas fixando uma delas e alterando as demais. Esse tipo de solução está de acordo com a ideia de permutação simples trabalhada nas tarefas de multiplicação que propusemos e fez a contagem enumerando de forma sistemática, fixando uma das figuras geométricas e alternando as demais.

## Problema elaborado pela aluna Pérola

Os problemas elaborados pela aluna Pérola foram os seguintes:

*Fernanda, queria saber quais eram todas as maneiras de conseguir comprar um arco que custava 7 reais com seu dinheiro. Ajude-a descobrir. Use todas as possibilidades! E atenção: só use a adição de 2 números.*

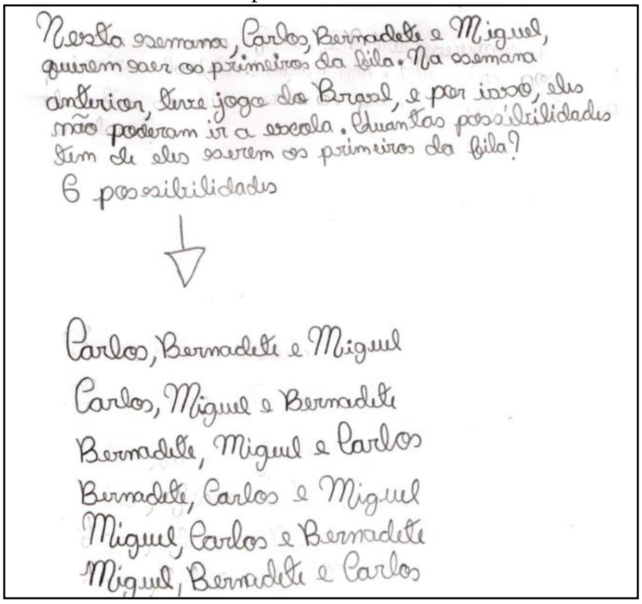
**Figura 09 –** Problema elaborado pela aluna Pérola com a ideia de adição




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores (2018)

*Nesta semana, Carlos, Bernadete e Miguel, querem ser os primeiros da fila. Na semana anterior, teve jogo do Brasil, e por isso, eles não puderam ir à escola. Quantas possibilidades têm de eles serem os primeiros da fila?*

**Figura 10 –** Problema elaborado pela aluna Perola com a ideia de multiplicação


Nesta semana, Carlos, Bernadete e Miguel, querem saer os primeiros da fila. Na semana anterior, teve jogo do Brasil, e por isso, eles não poderam ir a escola. Quantas possilbilidades tem de eles serem os primeiros da fila?
6 possibilidades

Carlos, Bernadete e Miguel
Carlos, Miguel e Bernadete
Bernadete, Miguel e Carlos
Bernadete, Carlos e Miguel
Miguel, Carlos e Bernadete
Miguel, Bernadete e Carlos

**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores (2018)

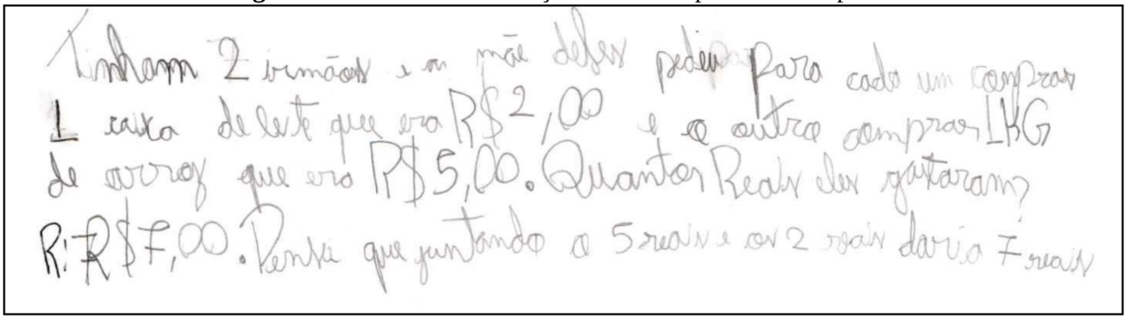
O primeiro problema envolveu a adição com a ideia de partição solicitando a enumeração por meio de cálculos. Consistiu em encontrar as soluções não negativas para a soma de dois números naturais com o total sete. Quando a aluna havia escrito o problema e apresentado a nós, questionamos se poderia fazer adições com várias parcelas que desse o total sete. Pérola disse que tinha que ser com duas parcelas. Chamamos a atenção dela sobre o enunciado que não dava essa informação, nisso a aluna acrescentou que era para usar adição só com dois números. O outro problema elaborado por Pérola envolveu o modelo combinatório de alocação, atendeu aos critérios de ordenação e solicitou a contagem. A aluna fixou um dos nomes e construiu as permutações para encontrar todas as enumerações possíveis.

## Problemas elaborados pelo aluno Lipinho

O aluno Lipinho elaborou o primeiro problema envolvendo o princípio aditivo integrando-o com o sistema monetário, mas o enunciado não explorou outras possibilidades de enumerações com o total sete com a soma de duas parcelas, pois os valores destas já estavam estabelecidos. Veja o problema a seguir.

*Tinham dois irmãos e a mãe deles pediu para cada um comprar uma caixa de leite que era R$ 2,00 e outro comprar 1kg de arroz que era R$ 5,00. Quantos reais eles gastaram?*

**Figura 11 –** Problema de adição elaborado pelo aluno Lipinho

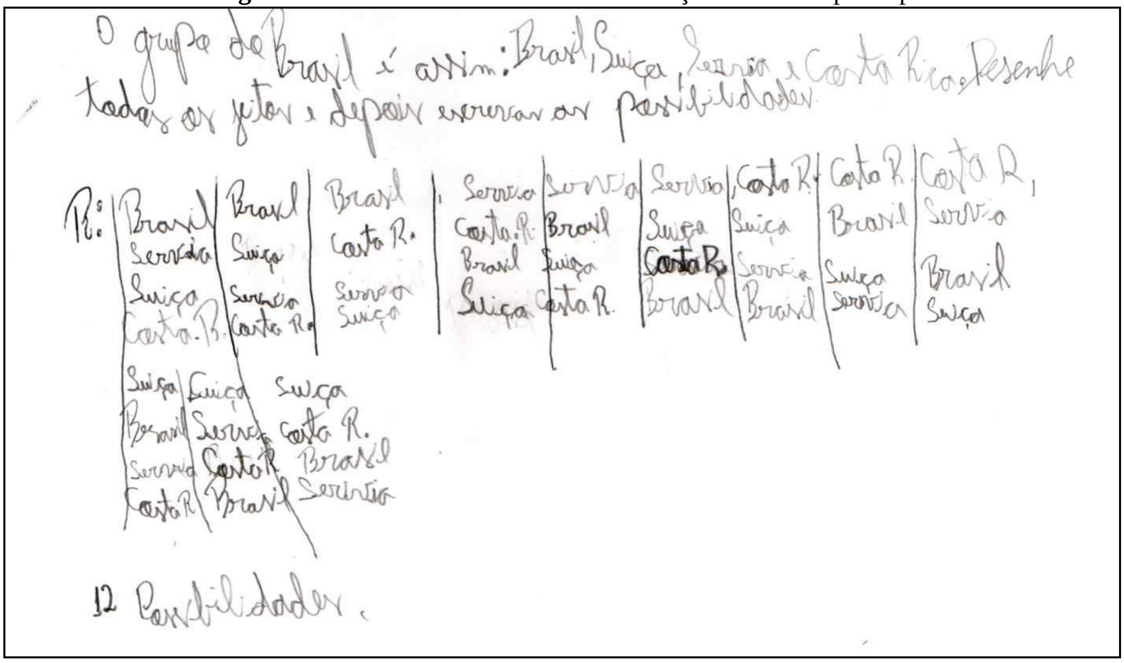

Tinham 2 irmãos e a mãe deles pediu para cada um comprar 1 caixa de leite que era R$ 2,00 e o outro comprar 1KG de arroz que era R$ 5,00. Quantos Reais eles gastaram?
R: R$ 7,00. Pensei que juntando o 5 reais e os 2 reais daria 7 reais

**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores (2018)

O segundo problema elaborado por Lipinho foi mais complexo do que os que foram trabalhados com a turma, pois envolveu um número maior de ordenações e, de acordo com o enunciado, atendeu ao modelo de alocação e respeitou os critérios de ordenação e não repetição de elementos.

*O grupo do Brasil é assim: Brasil, Suíça, Sérvia e Costa Rica. Desenhe todos os jeitos e depois escreva as possibilidades.*

**Figura 12 –** Problema com a ideia de alocação elaborado por Lipinho


O grupo do Brasil é assim: Brasil, Suiça, Servia e Costa Rica. Desenhe todos os jeitos e depois escrevar as possibilidades.
R: Brasil Servia Suiça Costa R. | Brasil Suiça Servia Costa R. | Brasil Costa R. Servia Suiça | Servia Costa R. Brasil Suiça | Servia Brasil Suiça Costa R. | Servia Suiça Costa R. Brasil | Costa R. Suiça Servia Brasil | Costa R. Brasil Suiça Servia | Costa R. Servia Brasil Suiça | Suiça Brasil Servia Costa R. | Suiça Servia Costa R. Brasil | Suiça Costa R. Brasil Servia
12 Possibilidades.

**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores (2018)

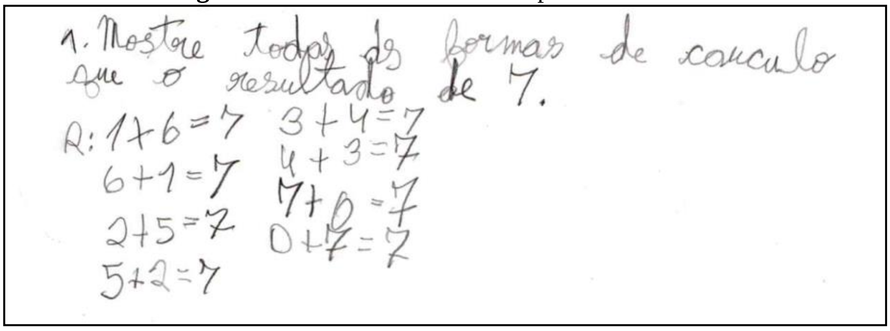
Para solucionar o problema, o aluno Lipinho usou ideias sistemáticas fixando um dos países e permutando os demais. Porém, este problema exigiu maior domínio das estratégias de sistematização devido ao número de permutações necessárias para encontrar todas as soluções.

**Problemas elaborados pela aluna Estela**

A aluna Estela elaborou um problema com as possibilidades de obter somas não negativas usando dois números naturais. Semelhante ao problema das barrinhas, a tarefa envolveu o modelo de partição e enumeração explorando a solução por meio de cálculos.

*Mostre todas as formas de cálculo que o resultado dê 7.*

**Figura 13 –** Problema elaborado pela aluna Estela

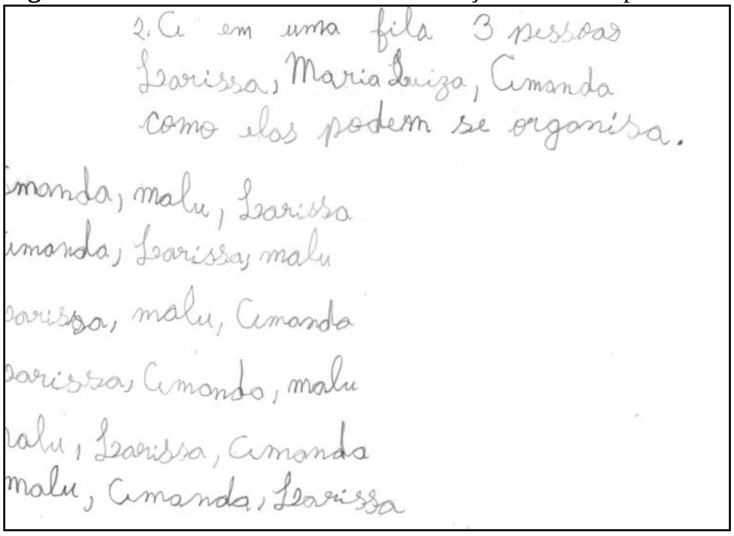

1. Mostre todas as formas de carculo que o resultado de 7.
R: 1+6=7 3+4=7
6+1=7 4+3=7
2+5=7 7+0=7
5+2=7 0+7=7

**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores (2018)

Para resolver o problema, Estela usou a comutatividade da adição como estratégia sistemática, para obter as todas as possibilidades de respostas. Embora tenha usado apenas somas com duas parcelas, o enunciado não está claro em relação a isso. Já o segundo problema elaborado foi semelhante ao da organização das pessoas numa fila.

*Há em uma fila três pessoas: Larissa, Maria Luiza e Amanda. Como elas poderiam se organizar?*

**Figura 14 –** Problema com a ideia de alocação elaborado por Estela


2. A em uma fila 3 pessoas
Larissa, Maria Luiza, Amanda
como elas podem se organisa.
manda, malu, Larissa
manda, Larissa, malu
arissa, malu, Amanda
arissa, Amanda, malu
alu, Larissa, Amanda
malu, Amanda, Larissa

**Fonte**: Arquivo dos pesquisadores (2018)

O problema envolveu o modelo de alocação e atendeu ao critério de ordenação e de não repetição de elementos. Pelo enunciado, foi solicitada a enumeração das possibilidades, e não a contagem, assim como no problema que elaborou com a ideia de partição. Estela resolveu de forma sistemática, fixando um dos nomes em uma das posições e foi alternando os demais.

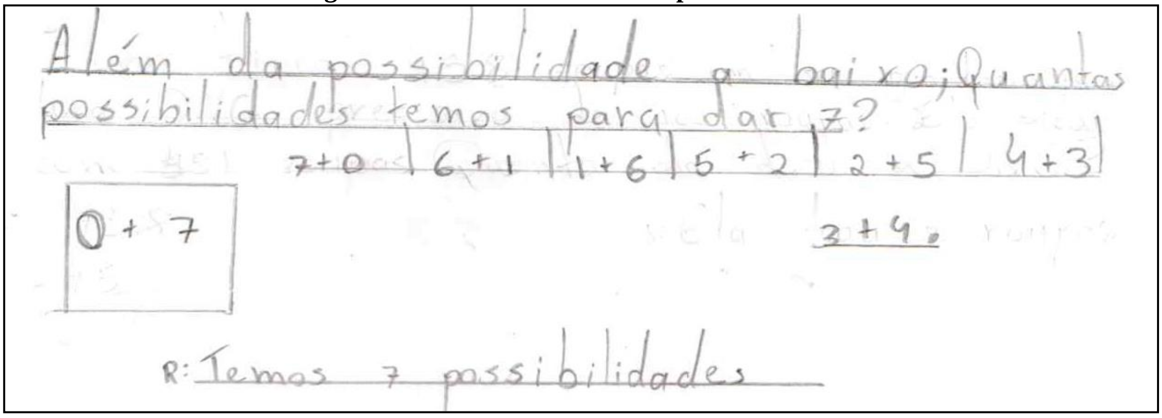
## Problemas elaborados pela aluna Flora

O primeiro problema elaborado pela aluna Flora foi semelhante ao da tarefa das barrinhas de acordo com o modelo de partição e atendeu ao parâmetro estabelecido com o total sete e solicitou a contagem do total de possibilidades.

*Além da possibilidade abaixo, quantas possibilidades temos para dar 7?*

$\boxed{0+7}$

**Figura 15 – Problema elaborado pela aluna Flora**




**Fonte: Arquivo dos pesquisadores (2018)**

Para calcular as possibilidades, a aluna realizou adições comutando os valores das parcelas, encontrando as somas não negativas com o total sete e usando dois números naturais. O segundo problema elaborado por Flora foi semelhante ao da organização das pessoas na fila, porém mais complexo, pois o número de possibilidades foi maior.

*Meu filho convidou três amigos para casa. Eles vão brincar na mesa. Quais são as possibilidades deles sentarem à mesa? (A mesa só tem 4 cadeiras).*

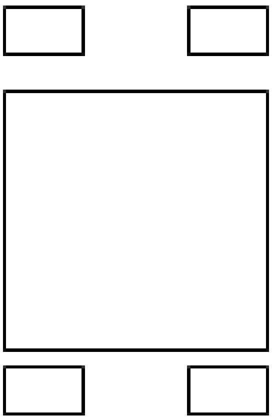
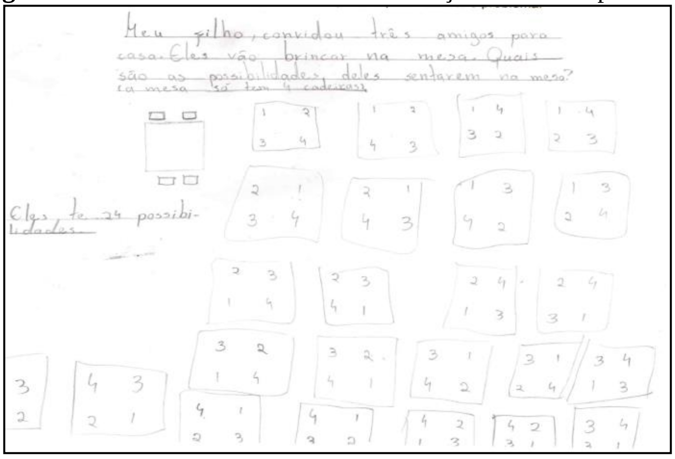


**Figura 16 –** Problema com a ideia de alocação elaborado por Flora




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores (2018)

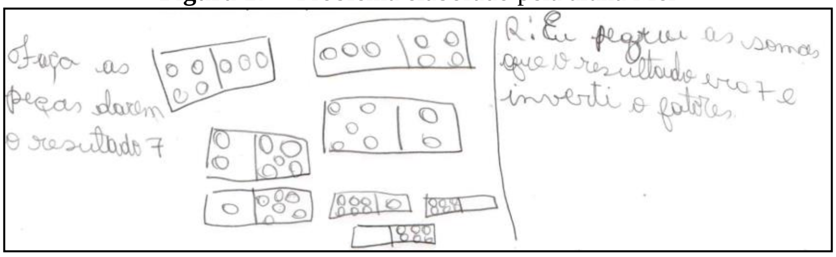
O enunciado envolveu a ideia de alocação de pessoas nas cadeiras, portanto atendeu ao modelo implícito de alocação e respeitou o parâmetro de ordenação e de não repetição de elementos. Para resolver a questão, a aluna usou a sistematização fixando as pessoas e uma cadeira e permutando as demais pessoas nas outras cadeiras, representando por meio de algarismos, semelhantemente à estratégia realizada na tarefa das pessoas na fila.

**Problemas elaborados pela aluna Mel**

Os problemas elaborados pela aluna Mel foram os seguintes:

a) *Faça as peças darem o resultado 7.*

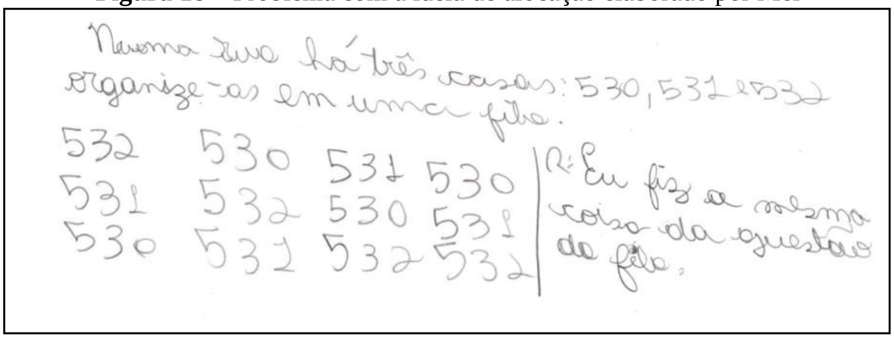
**Figura 17 –** Problema elaborado pela aluna Mel




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores (2018)

b) *Numa rua há três casas: 530, 531 e 532. Organize-as em uma fila.*

**Figura 18 –** Problema com a ideia de alocação elaborado por Mel




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores (2018)

O primeiro problema foi semelhante ao do dominó. Envolveu o modelo de partição, porém, nem todos os desenhos respeitam o parâmetro com o total sete, pois a aluna desenhou os casos (0+6) e (6+0) contando como possibilidades. Solicitou que fossem representadas (enumeradas) as peças com o total estabelecido. Para solucionar a questão, ela usou a comutatividade. O problema da letra (b) foi semelhante à tarefa das pessoas na fila, seguindo o modelo de alocação e atendendo ao parâmetro de ordenação sem repetição de elementos, e solicitou a enumeração das possibilidades. Durante o processo de resolução, Mel listou as possibilidades de forma não sistemática e só encontrou 4 possibilidades.

**Problemas elaborados pela aluna Moranguinho**

Embora o primeiro problema fosse de partição, a aluna Moranguinho elaborou um problema de adição (princípio aditivo) com a ideia de completar, porém solicitou a escolha de elementos que atendam ao parâmetro estabelecido, e a possibilidade foi única devido aos valores prefixados. Além disso, ela elaborou uma tarefa que integrou com sistema monetário.

a) *Laura tem R$ 2,00, mas ela precisa de R$ 7, 00. Selecione a quantia que dará R$ 7,00.*

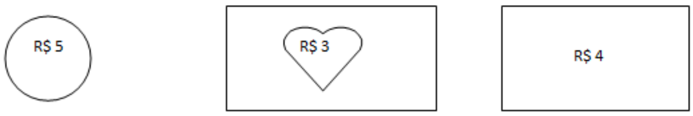
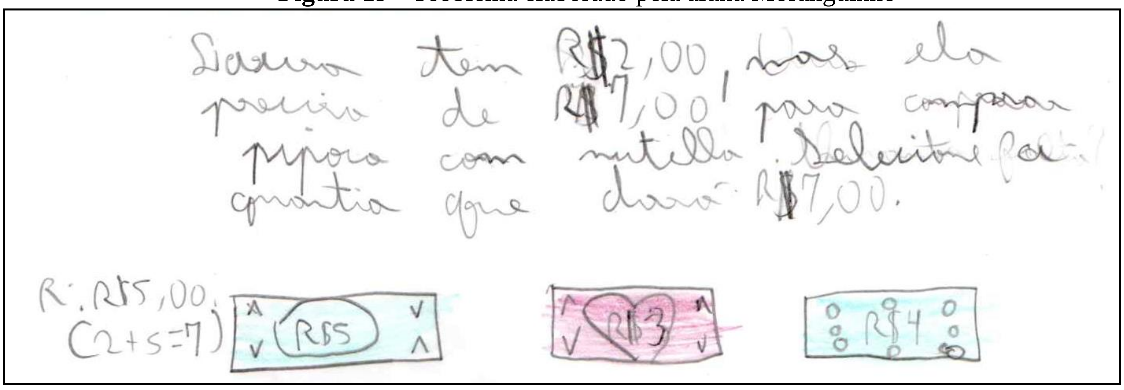



**Figura 19 –** Problema elaborado pela aluna Moranguinho

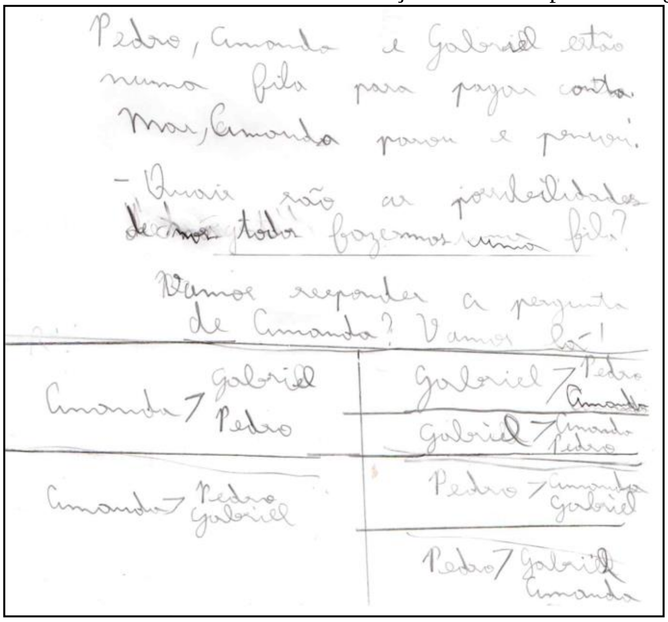



**Fonte**: Arquivo dos pesquisadores (2018)

Na letra (b), a aluna elaborou um problema semelhante à tarefa de organizar as pessoas na fila, atendendo ao modelo de alocação e respeitando os parâmetros de ordem e não repetição de elementos solicitando a enumeração das possibilidades.

b) *Pedro, Amanda e Gabriel estão numa fila para pagar conta. Mas, Amanda parou e pensou: – Quais são as possibilidades de nós todos fazermos uma fila? Vamos responder a pergunta de Amanda? Vamos lá!*

**Figura 20** – Problema com a ideia de alocação elaborado por Moranguinho



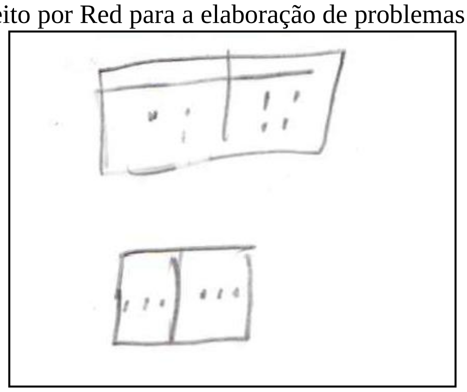

**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores (2018)

Moranguinho resolveu de forma sistemática usando a ideia de diagrama da árvore de possibilidades, fixando um dos nomes e associando com os outros dois nomes. Essa estratégia já havia sido utilizada pela aluna na realização da tarefa da fila.

## Problemas elaborados pelo aluno Red

O aluno Red não conseguiu elaborar o problema de adição com a ideia de partição com o total sete. Isso mostra que Red precisaria de mais tempo e de outras tarefas para compreender a necessidade de atentar para os parâmetros ou critérios estabelecidos. Na letra (b), elaborou uma pergunta sobre a convocação dos jogadores da seleção brasileira, mas que não exigia raciocínio combinatório.

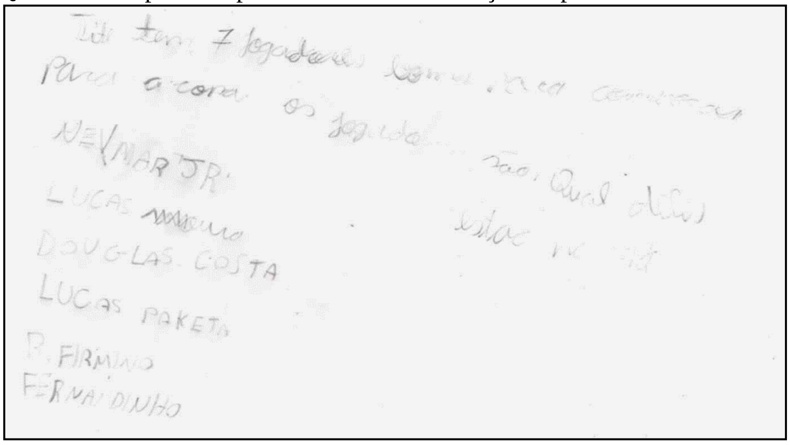
**Figura 21 –** Desenho feito por Red para a elaboração de problemas com a ideia de partição



**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores (2018)

*Tite tem 7 jogadores bons para convocar para a copa. Os jogadores são: Neymar Jr., Lucas, Douglas Costa, Lucas Paquetá, R. Firmino e Fernandino. Qual deles estão na copa?*

**Figura 22 –** Questão feita por Red para a tarefa de elaboração de problema com a ideia de alocação




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores (2018)

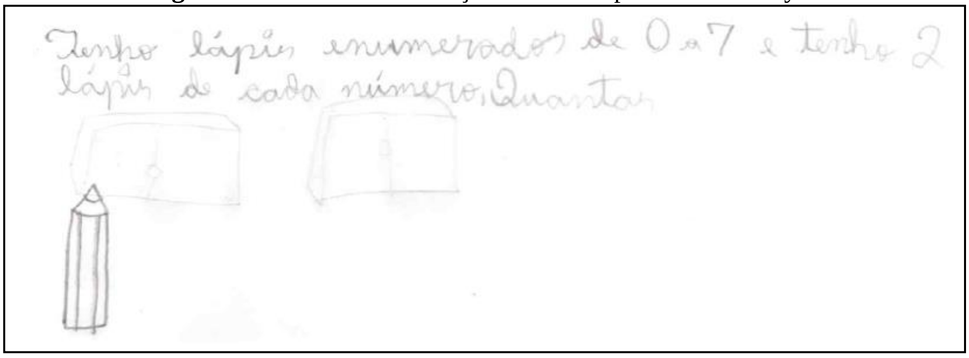
Embora a elaboração de problemas seja uma das habilidades a serem desenvolvidas no trabalho por meio de resolução de problemas, contudo, não é uma tarefa fácil como podemos observar nas respostas do aluno Red (Figuras 21 e 22) nesta etapa de elaboração de problemas matemáticos. Mas, este processo nos permite pensar e repensar as idas e vindas necessárias desse processo dinâmico de compreender, resolver, elaborar e propor problemas quando se tem compreensão da complexidade e da finalidade do processo de ensino, aprendizagem e avaliação em matemática.

**Problemas elaborados pelo aluno Athayde**

O aluno Athayde não conseguiu formular um problema para a letra (a) que solicitava uma questão que envolvesse a ideia de partição. Tentou criar um problema envolvendo lápis numerados, mas não conseguiu concluir a ideia. Para esse aluno, seria necessário mais tempo e trabalhar com outros tipos de problemas semelhantes que pudessem auxiliá-lo na formulação de questão com esse modelo combinatório.

a) *Tenho lápis enumerados de 0 a 7 e tenho lápis de cada número. Quantas...*

**Figura 23 –** Problema de adição elaborado pelo aluno Athayde

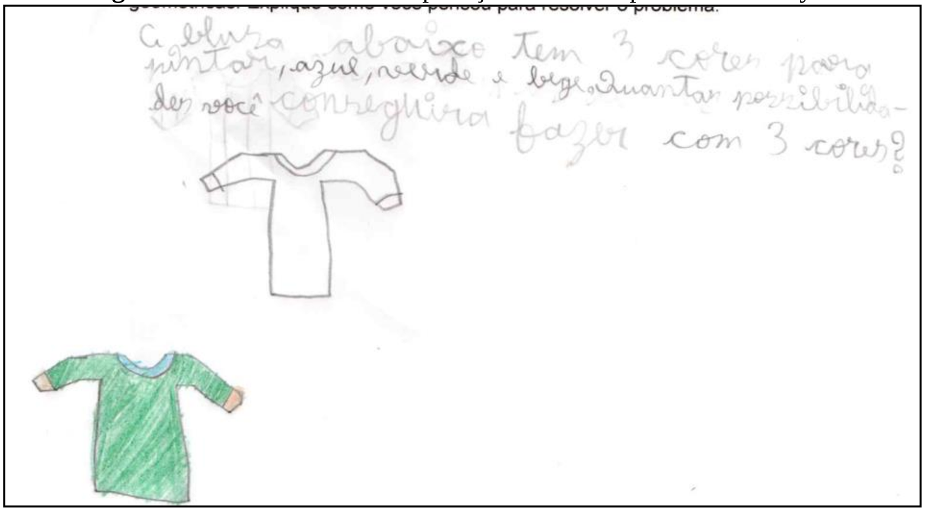



**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores (2018)

Na letra (b), o aluno elaborou um problema semelhante ao da pintura das casinhas que havíamos trabalhado em sala, mas não o resolveu. O enunciado atendeu ao modelo de alocação e solicitou a contagem, porém não restringiu o critério de possibilidade de repetição de cores. Veja o problema.

*b) A blusa abaixo tem 3 cores para pintar: azul, verde e bege. Quantas possibilidades você conseguirá fazer com 3 cores?*

**Figura 24 –** Problema de multiplicação elaborado pelo aluno Athayde



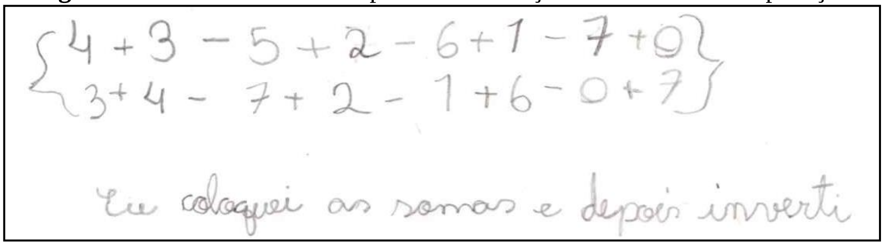

**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores (2018)

Embora o aluno Athayde tenha conseguido resolver os problemas propostos em outros momentos desta pesquisa, ele teve dificuldade em elaborar problemas. Isso nos remete ao pensamento de que o trabalho de elaboração de problemas envolve outras habilidades como a linguística, o domínio dos conceitos e invariantes de um determinado conteúdo matemático. Ademais, elaborar um problema envolve uma construção da aplicação da matemática em diferentes contextos, sobretudo em relação às crianças, e uma construção de conexões da matemática escolar com a matemática vivida.

**Problemas elaborados pela aluna Gonçalves**

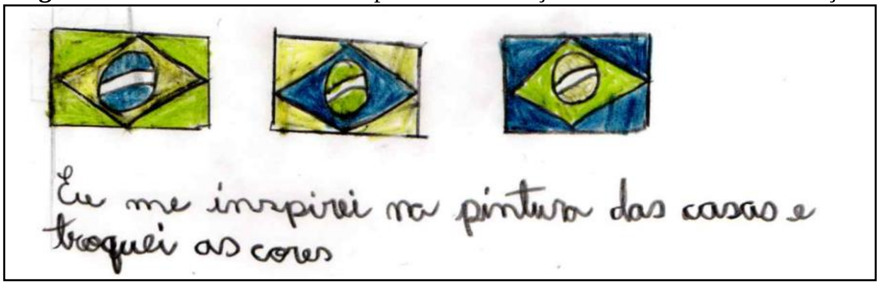
A aluna Gonçalves não elaborou o problema para a letra (a) nem para a letra (b). Apenas escreveu somas não negativas com dois números naturais, cujo total foi sete, e pintou a bandeira do Brasil trocando as cores de lugar. Isso nos mostrou a necessidade de respeitar as limitações e o tempo que cada aluno precisaria para resolver e formular problemas. Além disso, nos mostrou que compreender tanto as ideias de estratégias de resolução de tarefas do modelo combinatório implícito quanto de compreensão e identificação do modelo para posteriormente formular e reformular problemas são tarefas complexas para alguns alunos. Redigir enunciados de problemas mesmo para alunos que trabalham com uma professora que trabalha com isso ainda é algo complexo para esta aluna e outros desta turma de quinto ano.

**Figura 25 –** Somas elaboradas pela aluna Gonçalves com a ideia de partição




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores (2018)

**Figura 26 –** Desenhos elaborado pela aluna Gonçalves com a ideia de alocação




**Fonte:** Arquivo dos pesquisadores (2018)

Por outro lado, o que ela registrou nos mostra o que ela compreendeu das tarefas realizadas no experimento de ensino desde o início de 2018. Verificamos que, embora a aluna Gonçalves não tivesse elaborado enunciados de problemas, as somas atenderam ao modelo de partição e ao parâmetro estabelecido com o total sete, exceto a soma (7+2) escrita pela aluna, o que reforça a necessidade de ensinar os alunos a verificar se as suas soluções atenderam ao que estava sendo solicitado. Observamos também que a pintura das bandeiras envolveu o modelo combinatório implícito de alocação e respeitou o critério de ordenação e não repetição de elementos. Isso poderia ter relação com as operações de permutações caóticas, desde que não repetisse a cor em seu lugar de origem. Porém, pela ausência de enunciado podemos imaginar e supor relações com outras operações combinatórias.

As análises dos problemas elaborados pelos alunos nos permitiram compreender que eles têm potencial para elaborar e aprender diferentes estratégias de resolução de problemas envolvendo o raciocínio combinatório. Aprendemos também que seria importante ter outro momento do experimento do ensino com a turma, onde aplicássemos os problemas que as crianças elaboraram para que tentassem resolver e comentar sobre o que entenderam dos mesmos e as diferentes formas de resolver.

## REFLEXÕES FINAIS

Ao concentrarmos a nossa atenção nessa pesquisa e refletirmos sobre o que encontramos nos problemas formulados pelos alunos notamos alguns detalhes importantes. Acreditamos que seriam necessários outros momentos de elaboração de problemas semelhantes aos que havíamos trabalhado na pesquisa. Dizemos isso porque elaborar ou formular problemas com ideias de combinatória exigia que os alunos se envolvessem em pelo menos quatro etapas: a) elaborar o enunciado de um problema; b) resolver o problema elaborado; c) usar estratégias adequadas de resolução e; d) analisar se o problema e a solução tinham a mesma estrutura dos problemas trabalhados na pesquisa, isto é, analisar se eram semelhantes às tarefas que aplicamos na turma. Trabalhar partição junto com a ideia aditiva e alocação junto com a ideia multiplicativa foram novidades para os alunos, e isto, nos mostrou que outras tarefas precisariam ser desenvolvidas para que os alunos pudessem consolidar os conceitos combinatórios relacionados às ideias de partição e de alocação semelhantes aos problemas trabalhados na pesquisa.

Percebemos que situações como a copa mundial de futebol que aconteceu na Rússia de 14 de junho a 15 de julho, jogos escolares de 2018 e situações cotidianas estavam influenciando os alunos nos processos de elaboração e resolução das tarefas. Isto nos permite refletir sobre os cuidados necessários que professores precisam ter quando ensinam matemática para as crianças, adolescentes, jovens e até mesmo para os adultos. Cuidados em termos do que acontece na sala de aula e fora dela, seja no bairro, na cidade, no país ou em outra parte do mundo. Precisamos ter esse cuidado ao que está acontecendo em termos sociais, esportivos, emocionais, políticos ou culturais, pois em alguns casos nossos alunos podem estar mais atraídos pelos processos que ocorrem além dos muros da escola. Essas interferências externas podem interferir positivamente ou negativamente em qualquer aula de matemática. Podem interferir ainda mais quando se tratar de elaboração e resolução de problemas. No caso de nossa pesquisa, identificamos alunos como Lipinho, Red, Gonçalves e Malves que estavam tão interessados na copa do mundo que esse interesse esportivo acabou influenciando nas tarefas de elaboração e resolução de problemas desses quatro alunos.

Outro ponto importante a ser destacado é sobre o cuidado que devemos ter ao trabalhar com as crianças, para que os alunos não fiquem presos aos modelos de tarefas dadas pelo professor e queiram construir tarefas tão semelhantes a ponto de não desenvolverem a criatividade. Daí a necessidade de que o professor: a) dialogue com seus alunos sobre o que significa elaborar uma tarefa matemática; b) oriente os alunos para que consigam elaborar e resolver uma tarefa matemática coerente com o que foi solicitado e; c) converse com os alunos sobre o que é semelhante ou diferente nas tarefas ao analisarem os critérios de ordenação, os parâmetros estabelecidos, as regularidades, a natureza dos elementos, e o tipo de resposta solicitada entre outras características. Assim, num primeiro momento os alunos podem elaborar problemas parecidos e em outros momentos, pensarem em outras possibilidades depois deste processo.

Nos problemas de combinatória, uma das estratégias mais comum de resolução é fazer uma enumeração, ou seja, fazer uma listagem de possibilidades. No entanto, é importante que o professor oriente os estudantes a fazerem enumerações sistemáticas, mas que também saibam elaborar outras tarefas que exigem enumerações. Como o professor pode orientar seus alunos a fazerem isso? Ensinando os alunos a fixar uma das variáveis e alterar as demais, registrar o que fizeram e assim eles poderão aprender a enumerar sistematicamente. Depois pode solicitar que os alunos elaborem outras tarefas combinatórias em que seja necessário enumerar para encontrar a resposta. Também é imprescindível que o processo comece com problemas mais simples, envolvendo uma quantidade menor de casos para analisar (SANTOS, 1997). Este procedimento pode ser depois ampliado para tarefas que exijam que os alunos elaborem problemas que solicitem enumeração e contagem.

À medida que os discentes adquirirem estratégias de enumeração e contagem, eles poderão trabalhar com problemas um pouco mais complexos, ou seja, problemas em que o número de possibilidades é maior. A partir das estratégias propostas pelos alunos, o professor poderá explorar em sala de aula, diferentes ideias para realizar enumeração com desenhos, diagrama da árvore, tabelas ou quadros. Também poderá aos poucos, chamar a atenção dos alunos focalizando nas estratégias de resolução de modo que eles verifiquem que existe uma relação entre as enumerações feitas e o total de enumerações e a relação das enumerações com cálculos matemáticos.

## REFERÊNCIAS

BACHX, A. C.; POPPE, L. M. B.; TAVARES, R. N. O. **Prelúdio a análise combinatória**. 7. ed. São Paulo: Nacional, 1975.

BATANERO, C., GODINO, J., NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento combinatorio**. Madrid: Editorial Síntese, S.A., 1996.

BORBA, R. O raciocínio combinatório na educação básica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - ENEM, 10., 2010, Salvador, BA, 2010. **Anais...**, Salvador, BA, 2010. p. 1-16.

BORBA, R. Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - ENEM, 11., Curitiba, PR, 2013. **Anais...**, Curitiba, PR, 2013. P. 1-16
BRASIL. Ministério da Educação e Secretaria de Educação Fundamental. 1997. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação e Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/ SEF, 1998.

BROUSSEAU, G. Lês obstacles épistemologiques et lês problèmes em mathématiques. Meeting of the CIEAEM, lonvain da neuve, reproduced in les obstacles épistemologiques et les problems en mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble: La PenséeSauvage-Éditions, v. 4, n. 2, p. 164-198, 1976.

D'AMBROSIO, B. S. O professor-pesquisador diante da produção escrita dos alunos. In: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (Org.). **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 109-129.

DEWEY, J. **Como pensamos**: como se relaciona o pensamento reflexivo com o processo educativo: uma reexposição. Tradução de Haydée Camargo Campos. 4. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1979. v. 2 (Coleção Atualidades Pedagógicas).

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas, São Paulo: Autores Associados, 2012.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar 5**: combinatória, probabilidade. 6. ed. São Paulo: Atual, 1993.

LESTER, F. Teaching mathematical problem solving. **Nämmaren**, p. 32-43, 1987.
HOFFMAN, B.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. A exploração da escrita, leitura e oralidade em matemática. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., Recife, PE, 2011. **Anais...** Recife, PE, 2011. p. 1-12.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P. de; CARVALHO; P. C. P., FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 199-218. (Seminários e Debates).

ONUCHIC, L.R; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. **Educação matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.

ONUCHIC, L. R; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

PESSOA, C.; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1.ª a 4.ª série. **Zetetiké**: Revista de Educação Matemática, Campinas, SP, v. 17, n. 31, p. 105-150, dez. 2009.

PESSOA, C.; BORBA, R. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **Em Teia**: **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v.1, n.1, 2010. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2182/1753. Acesso em: 10 ago. 2017.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. (A obra foi publicada originalmente em 1945.)

ROA, R. **Razonamiento combinatório em estudiantes com preparación matemática avanzada**. 2000. 196 f. Tese (Doutorado em Ciencias Matemáticas) - Universidad de Granada, 2000.

SANTOS, V. M. P. dos. **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática**: métodos alternativos. Rio de Janeiro: Projeto Fundão. Instituto de Matemática/UFRJ, 1997.

SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. Resolução de problemas em matemática: uma abordagem no processo educativo. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 53, p. 43-74, jul./dez. 2008.

STAKE, R. E. **Pesquisa qualitativa**: estudando como as coisas funcionam. Porto Alegre: Penso, 2008.

STEFFE, L.; THOMPSON, P. Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In: LESH, R.; KELLY, A. E. (Eds.). **Research design in mathematics and science education**. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 2000. p. 267-307.

VALE, I.; PIMENTEL, T; BARBOSA, A. Ensinar matemática com resolução de problemas. **Quadrante**: Revista de Investigação em Educação Matemática. v. 24, n. 2, p. 39-60, 2015.