Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional São Paulo

Ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares na licenciatura através da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas

Fabíola da Cruz Martins[1]
Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

Silvanio de Andrade[2]
Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

RESUMO

Neste artigo objetiva-se apontar as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Exploração, Proposição e Resolução, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra, no ensino de Sistemas Lineares na licenciatura. Optou-se pelo conteúdo de Sistemas Lineares dada a necessidade de uma investigação que abrangesse a educação básica e a superior, visto que a grande problemática percebida no ensino de Álgebra trata de um distanciamento nestes dois níveis. A pesquisa[3], caracterizada como pedagógica, foi desenvolvida em uma turma do 5º período de um curso de Licenciatura em Matemática por meio de uma Oficina teórico-prática com 10 encontros. Os dados apontam que as Representações Múltiplas e a transição entre elas, aliada à Exploração-Resolução-Proposição de Problemas, favorecem uma aprendizagem com mais compreensão e colaboram na construção de uma nova postura do licenciando frente ao ensino de Sistemas Lineares.

Palavras-chave: Formação Inicial do Professor; Representações Múltiplas; Educação Algébrica.

Teaching and learning of Linear Systems in education teacher through Problem Exploration-Posing-Solving

ABSTRACT

This article aims to points out contributions of the mathematics teaching-learning methodology through Problem Exploration, Posing and Solving, combining Algebra Multiple Representations in the Linear Systems teaching in the pre-service teacher education. We opted for the content of Linear Systems given the need for an investigation that covered basic and higher education, since there is a distance in these two levels in Algebra teaching. The research that is characterized as teacher research was developed in a pre-service teacher education 5th grade classroom through a theoretical-practical workshop with 10 meetings. The data indicate that Multiple Representations and the transition between them, combined

Submetido em: 25/01/2022 **Aceito em:** 29/12/2022 **Publicado em:** 25/01/2023

[1] Doutoranda em Ensino de Ciências e Educação Matemática no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual da Paraíba (PPGECEM/UEPB). Professora de Matemática do Ensino Médio pela Secretaria de Estado da Educação e da Ciência e Tecnologia da Paraíba (SEECT/PB). Endereço para correspondência: Rua Bela Vista, 364. Centro, Cacimba de Dentro, PB. CEP: 58.230-000. E-mail: fabiolaa--@hotmail.com. Orcid: https://orcid.org/0000-0001-6838-9671.

[2] Doutor em Educação pela Universidade de São Paulo (USP). Professor no departamento de Matemática na Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). Endereço para correspondência: Rua Desembargador Trindade, 332, Campina Grande, PB, Brasil CEP: 58400-000. E-mail: silvanio@usp.br. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-1490-812X

[3] Pesquisa disponível na íntegra em Martins (2019), este artigo trata-se de um recorte da pesquisa.

with Problem Exploration-Solving-Posing, favor a learning with more understanding, and collaborate in the construction of a new posture of the pre-service teacher in relation to the teaching of Linear Systems.

Keywords: Pre-Service Teacher; Multiple Representations; Algebraic Education.

Enseñanza y aprendizaje de Sistemas Lineales en la carrera a través de Exploración-Creación-Resolución de Problemas

RESUMEN

Este artículo pretende señalar los aportes de la metodología de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas a través de la Exploración, Resolución y Creación de Problemas, combinado con las Representaciones Múltiples del Álgebra, en la enseñanza de Sistemas Lineales en la licenciatura. El contenido de Sistemas Lineales fue escogido dada la necesidad de una investigación que abarcara la educación básica y superior, ya que el gran problema que se percibe en la enseñanza del Álgebra tiene que ver con un desfase en estos dos niveles. La investigación, caracterizada como pedagógica, se desarrolló en una clase del 5º período de un curso de Licenciatura en Matemáticas a través de un taller teórico-práctico con 10 encuentros. Los datos indican que las Representaciones Múltiples y la transición entre ellas, aliadas a la Exploración-Resolución-Proposición de Problemas, favorecen un aprendizaje con mayor comprensión y colaboran en la construcción de una nueva actitud del licenciado hacia la enseñanza de Sistemas Lineales.

Palabras clave: Formación Inicial del Profesor; Representaciones Múltiples; Educación Algébrica.

INTRODUÇÃO

Os Sistemas Lineares constituem um tópico importante dentro da Álgebra, uma vez que podem possibilitar a modelagem de diversos problemas, como também, podem ser utilizados como ponto de partida para teorias matemáticas relevantes e atuais. Seu estudo é introduzido desde os anos finais do ensino fundamental, sendo aprofundado no ensino médio e em disciplinas de cursos de nível superior da área de exatas, tais como: Matemática, Física, Engenharias e outros.

É um conteúdo que não envolve, em sua essência, conceitos abstratos. Contudo, embora pareça um conteúdo básico, enfrentam-se muitas dificuldades em seu ensino-aprendizagem, principalmente, no que diz respeito ao seu significado, aos processos de resolução, à tradução da linguagem verbal para a linguagem matemática e à natureza de sua solução (PONTE, BRANCO; MATOS, 2009).

Pesquisas recentes sobre este tema (BATTAGLIOLI, 2008; RANGEL, 2011; JORDÃO, 2011; BERTOLAZI, 2012) discutem limites e possibilidades, e apontam alguns enfoques

teórico-metodológicos no ensino de Sistemas Lineares, considerando-os como alternativas para aprimorar este ensino e, possivelmente, minimizar as dificuldades enfrentadas em sala de aula.

Dada a necessidade, revelada nas pesquisas supracitadas, de abordar Sistemas Lineares utilizando diferentes enfoques teórico-metodológico, este artigo apresenta os resultados de uma pesquisa de mestrado, desenvolvida pela primeira autora (MARTINS, 2019) com alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública na Paraíba.

No presente trabalho, busca-se apontar as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Exploração, Proposição e Resolução, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra, no ensino de Sistemas Lineares na licenciatura em Matemática.

Para tanto, na primeira parte deste artigo, pretende-se apresentar uma breve contextualização teórica sobre as Representações Múltiplas e o ensino de Sistemas Lineares, buscando evidenciar as principais dificuldades encontradas no ensino deste conteúdo, e esclarecer a importância das Representações Múltiplas de Álgebra na superação destas dificuldades.

Na sequência, pretende-se situar o leitor nesta pesquisa - no que diz respeito a Exploração, Resolução e Proposição de Problemas como enfoque teórico-metodológico, de modo que possa compreender as discussões atuais e identificar as contribuições dessa metodologia no ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares.

O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES E AS REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS DE ÁLGEBRA

A utilização de Sistemas Lineares para a resolução de determinados problemas não é algo recente. Como referendado em Zuin e Santos (2019), registros antigos de povos Babilônios, Egípcios, Chineses, Gregos, Hindus e Árabes evidenciam traços dessa utilização. Mesmo antes da Álgebra tornar-se um campo de estudo da Matemática, indícios apontam a utilização de técnicas aritméticas para solucionar problemas modeláveis através de sistemas de equações com várias incógnitas.

Embora os Sistemas Lineares proporcionem ampla abrangência, seu estudo é considerado acessível aos estudantes da Educação Básica, pois não demanda a utilização de conceitos sutis ou complexos. No entanto, as vivências na Educação Básica e o levantamento de pesquisas desenvolvidas nas salas de aula permitem afirmar que mesmo com essa baixa

complexidade, os alunos se mostram inseguros frente ao conteúdo, apresentando dificuldades nos métodos de resolução, na modelagem de um problema, na interpretação dos resultados, dentre outros.

De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009, p. 151), as principais dificuldades encontradas pelos alunos da Educação Básica podem ser agrupadas em três grandes categorias: i) Compreender a noção de um sistema de equações e a natureza de sua solução; ii) Compreender os processos de resolução de sistemas de equações e executá-los corretamente até obter a solução; iii) Ser capaz de resolver problemas dados por enunciados verbais, traduzindo as condições dadas por um sistema de equações e interpretando a solução do sistema de acordo com as condições dadas.

Na primeira categoria, os autores tratam de dois aspectos importantes: a noção de sistema e a natureza da solução. Acredita-se que os alunos persistem com essas dificuldades por não realizarem conexões entre o conteúdo de Sistemas Lineares e os conhecimentos já adquiridos em Álgebra.

Sobre a natureza da solução, geralmente, esse estudo é voltado para a discussão de sistemas, com uma classificação superficial entre Sistema Impossível, Possível e Determinado e Possível Indeterminado. Compreende-se que a apresentação da classificação de sistemas, apenas de modo expositivo, sem que o aluno passe por experiências que possibilite a compreensão e a retirada de conclusões a respeito da classificação do sistema, é um forte aliado à essa dificuldade.

Na segunda categoria, os autores destacam as dificuldades relacionadas à compreensão e à execução correta dos processos de resolução de sistemas de equações. Quando os autores tratam de execução, acredita-se que eles se referem aos processos algébricos que são tradicionalmente utilizados e propostos pelos livros didáticos, sendo eles: método da substituição, método da adição, método da comparação, método do escalonamento, método da regra de Cramer, dentre outros.

Na terceira categoria, os autores mencionam as dificuldades na transição da linguagem verbal para a linguagem algébrica, bem como destacam obstáculos no que se refere à interpretação da solução no contexto do problema. Mesmo sabendo que com exercícios e repetição as dificuldades voltadas à resolução de sistemas possam ser superadas, isso não é possível nesta categoria, uma vez que exige do aluno criatividade e compreensão sobre a natureza de um sistema linear.

De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), uma boa alternativa para promover o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas e da comunicação matemática dos alunos é a Resolução de Problemas. Esses autores sugerem que os problemas podem ser formulados, inicialmente, em linguagem natural e, por fim, discutidos com toda a turma.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) recomendam, no estudo de Sistemas Lineares, um trabalho que vá além da técnica de resolução de sistemas, colocando a Álgebra sob o olhar da geometria:

> A resolução de um sistema *2x2* e duas equações e duas variáveis pode ser associada ao estudo da posição relativa de duas retas no plano. Com operações elementares simples, pode-se determinar a existência ou não de soluções desse sistema, o que significa geometricamente os casos de intersecção/coincidência de retas ou paralelismo de retas (BRASIL, 2006, p.77-78).

Em outras palavras, a partir da interpretação geométrica de um Sistema Linear, pode-se observar sua solução, discussão e classificação, sendo essa mais uma alternativa a ser considerada no ensino de Sistemas Lineares.

As pesquisas mencionadas a seguir, discutem limites, possibilidades e enfoques teórico-metodológicos no ensino de Sistemas Lineares. Essas pesquisas foram analisadas por meio do mapeamento de pesquisas desenvolvidas e finalizadas nos últimos anos no Brasil, disponíveis na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), as quais versam, exclusivamente, sobre o ensino de Sistemas Lineares.

Battaglioli (2008) aponta para a necessidade de contemplar as conversões entre os registros gráfico, algébrico e de língua natural, sobretudo, que se explore o registro gráfico, pois acredita neste como uma forma de auxiliar o aluno na análise e compreensão dos resultados obtidos; Rangel (2011) sugere a utilização de Projetos de Modelagem Matemática, uma vez que estes podem proporcionar uma aproximação da Matemática ao contexto social em que o aluno se encontra, simplificando as abstrações existentes e criando uma fundamentação consistente dos significados que um conjunto-solução de um sistema possui; Jordão (2011) ressalta a importância da diversidade de registros e articulação entre eles no ensino de Sistemas Lineares 3x3. Nesse contexto, apresenta o Winplot como software potencial, pois viabiliza a visualização e compreensão dos Sistemas Lineares em 3D; Bertolazi (2012) identifica as dificuldades e incompreensões dos alunos da Licenciatura em Matemática no conteúdo Sistemas Lineares e orienta a utilização da Resolução de Problemas no ensino, acreditando nesta como uma forma de o aluno perceber a aplicação e, assim, valorizar a aprendizagem do mesmo.

Nesse contexto, diante das dificuldades expostas por Ponte, Branco e Matos (2009), considerando as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) e os enfoques teórico-metodológicos discutidos nas pesquisas citadas, percebe-se a necessidade de descentralizar o ensino de Sistemas Lineares dos meros procedimentos algébricos, incorporando, assim, outras formas de abordagem e representação ao seu ensino.

Neste cenário, as Representações Múltiplas de Álgebra são consideradas como potencial aliadas no ensino de Sistemas Lineares, pois acreditamos que estas podem proporcionar uma aprendizagem que contribua para a construção, aquisição e compreensão do conteúdo de maneira mais significativa.

A ideia da utilização das Representações Múltiplas no ensino de Álgebra está presente nos documentos oficiais, sendo recomendada inicialmente nos *Principles and Standards for School Mathematics* (Princípios e Padrões para a Matemática Escolar), documento organizado pelo *National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM, (Conselho Nacional de Professores de Matemática), no ano 2000, nos EUA. De acordo com os *Standards* (Padrões) a representação é considerada como um padrão de procedimento, dessa forma, "o termo representação refere-se tanto ao processo como ao resultado – por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma à forma em si mesma" (NCTM, 2000, p. 75).

Friedlander e Tabach (2001) apresentam a ideia de Representações Múltiplas de Álgebra a partir de quatro representações: verbal, numérica, gráfica e algébrica. De acordo com os autores, o uso das representações tem o potencial de tornar o processo de aprendizagem de Álgebra significativo e efetivo.

A representação verbal geralmente é usada para apresentar um problema e é necessária na interpretação final dos resultados obtidos na solução do processo. A representação numérica é familiar para os estudantes no início da fase do estudo de Álgebra, sendo importante para adquirir uma primeira compreensão de um problema e para a investigação de casos particulares. A representação gráfica é eficaz em fornecer uma imagem clara e uma visualização geral. A representação algébrica é concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos.

No entanto, no cenário atual da educação, essas representações são utilizadas de maneira isolada, sendo priorizada a representação algébrica e, mais adiante, a representação gráfica, não havendo transições entre as representações.

De acordo com Friedlander e Tabach (2001), se utilizadas dessa forma, nenhuma das

representações consegue abranger a totalidade de um conteúdo, pois, embora possuam inúmeras vantagens, elas também possuem desvantagens, como se pode ver no Quadro 1 a seguir. Essas vantagens e desvantagens são destacadas no sentido de ressaltar suas potencialidades e limitações e de evidenciar a importância e a necessidade da utilização simultânea de várias representações, uma vez que, isoladamente, nenhuma representação pode abranger todas as potencialidades.

Quadro 1 – Vantagens e desvantagens das Representações Múltiplas de Álgebra

Representação	Vantagens (potencialidades)	Desvantagens (limitações)
Verbal	• Possibilita ambiente natural para entender seu contexto e comunicar sua solução; • Facilita a apresentação e aplicação de padrões gerais; • Possibilita a conexão entre a matemática e outras áreas;	• Pode ser ambígua e provocar associações irrelevantes ou enganosas; • É menos universal; • Sua dependência do estilo pessoal pode ser um obstáculo na comunicação matemática;
Numérica	• Familiar para os estudantes na fase inicial com Álgebra; • Oferece uma ponte eficaz para Álgebra e precede as outras representações; • Importante na compreensão inicial de um problema e na investigação de casos particulares;	• Pode não ser eficaz em fornecer um quadro geral; • Alguns aspectos ou soluções importantes de um problema podem ser perdidos; • É uma ferramenta limitada na resolução de problemas;
Gráfica	• Eficaz em fornecer uma imagem clara de uma função real estimada de uma variável real; • Os gráficos são intuitivos e atraentes aos que gostam de uma abordagem visual;	• Pode não ter a precisão necessária, é influenciada por fatores externos (como escala); • Sua utilidade como ferramenta matemática varia de acordo com a tarefa em questão;
Algébrica	• Concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos; • A manipulação de objetos algébricos às vezes é o único método de justificar ou provar declarações gerais.	• O uso exclusivo de símbolos (em qualquer estágio de aprendizagem) pode dificultar o significado matemático ou natureza dos objetos representados, causando, dificuldades na interpretação dos seus resultados.

Fonte: Martins (2019, p. 50).

Friedlander e Tabach (2001) apontam para a necessidade de os professores e desenvolvedores do currículo estarem conscientes da necessidade de trabalhar em um ambiente de múltiplas representações, isto é, um ambiente que permita a representação de um problema e sua solução de várias maneiras. Pois acreditam que esta é uma forma de atender aos estilos individuais de pensamento dos alunos, como também, acreditam que a utilização combinada das múltiplas representações pode minimizar as desvantagens e ser uma ferramenta efetiva no ensino.

Acredita-se que a utilização das diferentes representações e a transição entre elas pode facilitar a compreensão do aluno sobre os conceitos matemáticos, como também, o trabalho do professor, especialmente no que diz respeito à avaliação contínua do desenvolvimento do aluno.

Friedlander e Tabach (2001) destacam as diversas contribuições que o problema apresentado em múltiplas representações pode proporcionar, tais como: i) incentiva a flexibilidade na escolha de representações dos alunos em seu caminho de solução e aumenta sua conscientização sobre seu estilo de solução; ii) dá legitimação ao uso das diversas representações no processo de solução; iii) proporciona transições involuntárias entre as representações, fazendo com que o aluno as perceba como uma necessidade natural e não como um requisito arbitrário.

Nesse contexto, acredita-se na Resolução de Problemas, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra, como metodologia conveniente no ensino de Sistemas Lineares, visto que pode proporcionar conversões pretendidas e, possivelmente, facilitar a compreensão do conteúdo.

ENSINO-APRENDIZAGEM DE SISTEMAS LINEARES ATRAVÉS DA EXPLORAÇÃO, PROPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Antes de adentrar-se na discussão sobre as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, necessita-se deixar claro como esta é considerada neste trabalho.

A princípio, reafirma-se que a proposta de ensino através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas não busca contrapor a perspectiva da Resolução de Problemas, mas, esclarecer que nessa proposta o intuito não é somente a busca pela solução, mas, abranger também outros pontos.

Nesse sentido, Andrade (1998, 2017) esclarece que, nessa proposta, seu interesse principal está centrado no desencadeamento da realização de algum trabalho efetivo que, a partir da mediação-refutação do professor e dos próprios alunos, possa se chegar à solução e muito além dela. Assim, esta compreensão de problema se mostra como algo que envolve não somente a resolução, mas a sua exploração em múltiplos contextos.

A Proposição de Problemas é um tema emergente na Educação Matemática que vem ganhando nos últimos anos vasta proporção em termos de pesquisas e práticas educativas, tendo destaque em eventos e publicações internacionais e também estado presente no currículo

educacional de muitos países. Ela constitui o 17° *Topic Study Group - TSG* (Tópico Grupo de Estudos) do 14° *International Congress on Mathematical Education - ICME* (Congresso Internacional de Educação Matemática) que será realizado em Shanghai – China, no ano 2021.

De acordo com a organização do evento, há uma preocupação com a Resolução de Problemas e Proposição de Problemas em relação ao ensino e aprendizagem de matemática. A Resolução de Problemas tem sido foco de investigações em Educação Matemática por mais de 70 anos, por comparação, a Proposição de Problemas é um campo mais jovem de investigação em Educação Matemática. Assim, destaca que a justaposição desses dois tópicos no TSG mescla um campo maduro de pesquisa com um mais emergente, reconhecendo nisso que ambos são de grande interesse para as comunidades de pesquisa e prática da Educação Matemática neste momento.

A pesquisa aqui discutida trata de um estudo qualitativo, constituindo a pesquisa de mestrado da primeira autora (MARTINS, 2019), intitulada "Ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares na Formação do Professor de Matemática via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas". Essa pesquisa foi desenvolvida na modalidade de Pesquisa Pedagógica, a qual é descrita por Lankshear e Knobel (2008) como uma pesquisa conduzida com base na própria prática profissional do professor, em que os propósitos da pesquisa são frutos de questões, problemas existentes ou percebidos, ou das preocupações dos próprios professores.

Este estudo caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa, a qual de acordo com Bogdan e Biklen (1994) tem as seguintes características: i) a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; ii) a investigação qualitativa é descritiva; iii) o processo é tão importante quanto os resultados ou produtos; iv) os dados são analisados de maneira indutiva e; v) o significado é de importância essencial na abordagem qualitativa.

Desse modo, destaca-se, a seguir, alguns pontos da pesquisa desenvolvida que correspondem aos aspectos citados:

- A pesquisa foi realizada em uma turma do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública da Paraíba, cursando a disciplina "Ensino da Matemática através da Resolução de Problemas", em que a professora da turma era a própria pesquisadora, responsável pela elaboração do material para levantamento de dados, como também pela aplicação, observação, descrição e análise.

- Os dados foram levantados por meio de uma Oficina desenvolvida na disciplina, através dos registros escritos dos alunos na resolução das atividades, diálogos registrados durante as aulas e seminários apresentados pelos alunos.
- O propósito das atividades desenvolvidas não era centrado no resultado obtido, mas no percurso de cada aluno durante a resolução do problema.
- As discussões e análises foram realizadas a partir do acompanhamento do desenvolvimento dos alunos no decorrer da Oficina.
- Ao considerar que os alunos da licenciatura já haviam tido contato com o conteúdo abordado, o diálogo durante a Oficina buscou identificar as concepções que os alunos construíram ao longo de sua vida acadêmica, proporcionando a ampliação delas a partir de uma aprendizagem com mais compreensão e, até mesmo, contribuir no desenvolvimento de novos conceitos.

A Oficina utilizada como instrumento de levantamento de dados abordou o conteúdo Sistemas Lineares, tendo como objetivo promover o estudo de Sistemas Lineares, aliado às Múltiplas Representações de Álgebra, através da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas.

Durante a Oficina, foi utilizado como registro dos dados as notas de aula da professora-pesquisadora, atividades impressas, registros dos alunos na resolução das atividades, imagens fotográficas de resoluções na lousa e outras produções dos alunos. Para auxiliar na descrição das atividades e melhor compreensão do raciocínio dos alunos, também foi utilizado, como registro, as suas falas, uma vez que, no decorrer das aulas, a professora-pesquisadora buscou anotar diálogos e comentários pertinentes, sempre procurando transcrevê-los ao final das aulas.

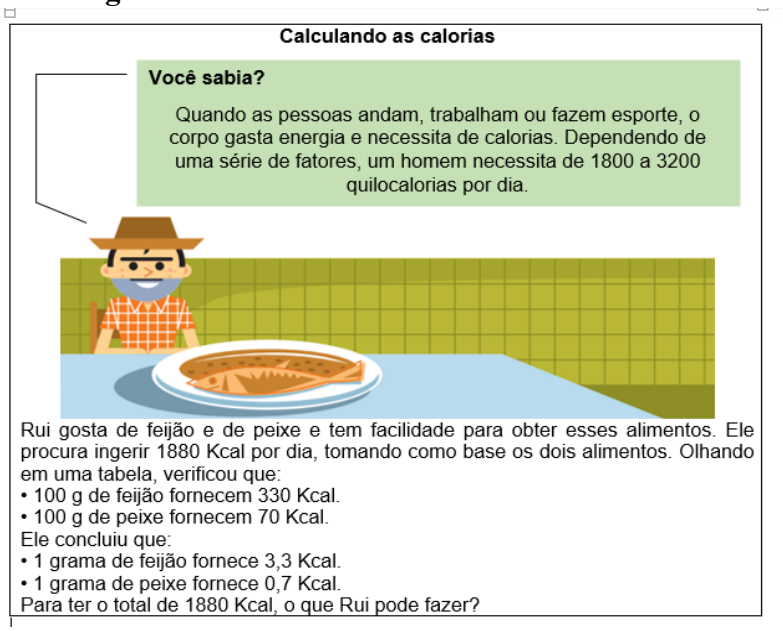
Para identificar os alunos e preservar suas identidades, eles foram nomeamos em ordem alfabética, como disposto no diário de classe, por: A1, A2, A3, ..., A13.

Será apresentado neste artigo a descrição, discussão e análise de uma atividade realizada na oficina, com o intuito de apontar contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Exploração, Proposição e Resolução, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra, no ensino de Sistemas Lineares na licenciatura.

Nas atividades realizadas nesta pesquisa, pôde-se destacar, inicialmente, a importância de apresentar o conteúdo de Sistemas Lineares através Resolução de Problemas, uma vez que as dificuldades apresentadas pelos licenciandos não consistiam na resolução dos sistemas, pois

eles conheciam e dominavam os métodos de resolução. No entanto, estes alunos apresentavam dificuldades na transição da linguagem verbal para a linguagem algébrica, não recorrendo ao conteúdo de sistemas para a resolução do problema, mas, ao método de tentativa e erro, como podemos ver no recorte da atividade apresentado na Figura 1.

Figura 1 – Atividade 1 desenvolvida na Oficina.



Fonte: Brasil (2008, p. 115)

Essa atividade foi desenvolvida no primeiro encontro da oficina e tinha como objetivos: i) Representar problema por meio de equação linear com duas incógnitas; ii) Explorar o conceito de soluções de uma equação linear com duas incógnitas; iii) Introduzir conversa sobre Sistemas Lineares. Assim, esperava-se que os alunos traduzissem o problema da linguagem verbal para a linguagem algébrica, percebendo que existem inúmeras soluções para a composição desta refeição, podendo, dessa forma, representar a situação por meio de uma equação linear com duas variáveis, para que em seguida fosse introduzido a conversa sobre sistemas lineares.

No entanto, essa não foi a solução imediata dos alunos, o que é comum ocorrer na Resolução de Problemas, como destacado por Andrade (2017):

> Nessa ideia aqui de problema, não estamos interessados, em primeira instância, que o aluno resolva a tarefa ou a questão proposta, mas que a situação ou tarefa proposta possa desencadear no aluno a realização de algum trabalho efetivo, que num processo de reflexão e síntese, com a mediação-refutação do professor e/ou dos próprios alunos,

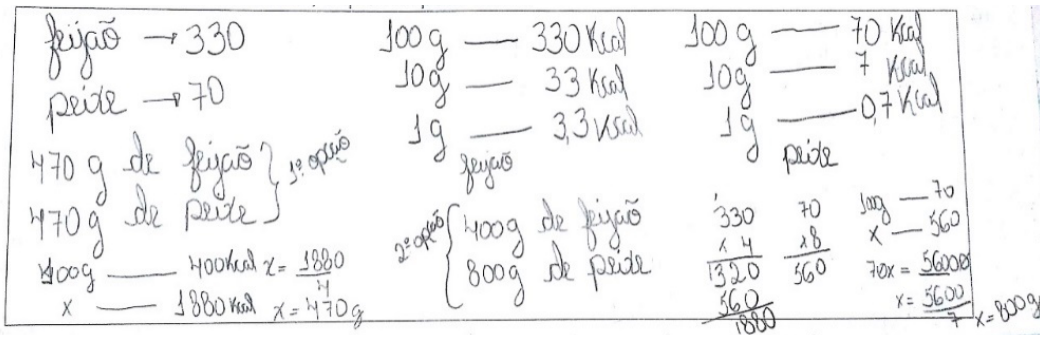
> possa então se chegar à resolução e solução da tarefa proposta e ir inclusive além dela (ANDRADE, 2017, p. 365).

Nas primeiras tentativas de resolução os alunos questionavam se o problema podia ser resolvido com um valor aproximado, pois encontrar o valor exato seria uma tarefa demorada. Por esses questionamentos pôde-se perceber que eles ainda não haviam visualizado que, utilizando uma equação linear de duas variáveis, eles poderiam encontrar esse valor exato, ou o conjunto de valores.

Utilizando o método tentativa e erro, o aluno A3 (nomeado dessa forma para que sua identidade não fosse revelada) resolve o problema da seguinte forma:

> **A3**: *Bem... eu fiz uma relação entre g e kcal para 100, 10 e 1. Em seguida, fui fazendo as somas, multiplicações, sempre obedecendo os valores correspondentes a 100, 10 e 1, até que encontrasse 1880 kcal.*
> **P**: *Qual o valor encontrado?*
> **A3**: *Na verdade, foram os valores, percebi que tinha 2 opções de cardápio. Ele poderia comer 470 g de feijão e 470 g de peixe, ou comer 400 g de feijão e 800 g de peixe.*
> (Diálogo entre pesquisadora e aluno, 2019).

Figura 2 – Registro da resolução do A3



Fonte: Martins (2019, p. 70)

Nesse momento, a professora convidou a turma para calcular se os valores encontrados pelo colega satisfaziam o problema. Ao verificarem que sim, a professora continuou a mediação:

> **P**: *Então obtivemos duas opções de cardápio para o problema, alguém encontrou outra opção?*
> *(Silêncio)*
> **P**: *Teriam outras opções?*
> *(Silêncio)*
> (Diálogo entre pesquisadora e aluno, 2019).

Como destacado por Friedlander e Tabach (2001), a utilização de valores numéricos é importante para uma primeira compreensão do problema e para a investigação de casos

particulares, oferecendo uma ponte conveniente em relação à Álgebra. Nesse sentido, a professora continuou:

> **P**: *Vamos verificar novamente os valores encontrados:*
> $3{,}3\ kcal/g.470g\ feijão + 0{,}7\ kcal/g\ .470g\ peixe = 1880\ kcal$
> $3{,}3\ kcal/g.400g\ feijão + 0{,}7\ kcal/g\ .800g\ peixe = 1880\ kcal$
> (Fala da pesquisadora, 2019).

A partir dessa mediação, buscou-se evidenciar a existência de um parâmetro livre, a qual vão-se atribuindo valores, e outro que será obtido dependendo dele. Isto é, se for atribuído valores para x, o valor de y dependerá deste valor. Nessa abordagem, a professora foi questionando os alunos sobre outros valores para feijão e peixe que totalizassem 1880 kcal e fez o registro na lousa, como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Tabela elaborada em sala com a composição da refeição (peixe e arroz).

Feijão (g) x	Feijão (Kcal) $\frac{3,3Kcal}{g}.x$	Composição da refeição $1880Kcal - \frac{3,3Kcal}{g}.x = 0,7y$	Peixe (Kcal) $0,7y$	Peixe (g) y
400 g	1320 $Kcal$	$1880Kcal - 1320\ Kcal = 560\ Kcal$	560 $Kcal$	800 g
410 g	1353 $Kcal$	$1880Kcal - 1353\ Kcal = 527\ Kcal$	527 $Kcal$	752,8571 g
420 g	1386 $Kcal$	$1880Kcal - 1386\ Kcal = 494\ Kcal$	494 $Kcal$	705,7143 g
430 g	1419 $Kcal$	$1880Kcal - 1419\ Kcal = 461\ Kcal$	461 $Kcal$	658,5714 g
440 g	1452 $Kcal$	$1880Kcal - 1452\ Kcal = 428\ Kcal$	428 $Kcal$	611,4286 g
450 g	1485 $Kcal$	$1880Kcal - 1485\ Kcal = 395\ Kcal$	395 $Kcal$	564,2857 g
460 g	1518 $Kcal$	$1880Kcal - 1518\ Kcal = 362\ Kcal$	362 $Kcal$	517,1429 g
470 g	1551 $Kcal$	$1880Kcal - 1551\ Kcal = 329\ Kcal$	329 $Kcal$	470 g

Fonte: Martins (2019, p. 71)

A primeira coluna da tabela foi destinada à variável x, que se referia à quantidade de gramas de feijão. Consideramos o x como o parâmetro livre, assim, mediante a resolução de A3, os alunos foram atribuindo os valores. Na segunda coluna, representamos por $\frac{3,3Kcal}{g}.x$ o valor de Kcal obtidos pelas gramas determinadas de feijão.

Tendo a quantidade de Kcal de feijão e sabendo a quantidade de Kcal que a refeição deveria totalizar, realizamos a subtração desses dois valores na coluna 3 e conhecemos a quantidade de Kcal que ainda faltavam para completar a refeição. Essa quantidade foi

representada na quarta coluna por 0,7y, visto que as Kcal que faltavam seriam completadas por peixe, que fornece a quantidade de Kcal citadas.

Por fim, foi representado na quinta coluna o valor de y, isto é, a quantidade de gramas de peixe necessárias a cada refeição. Para a obtenção desse valor, foi realizada a divisão do valor encontrado na coluna anterior por 0,7, que é a quantidade de Kcal fornecida por cada grama de peixe ingerida.

Após reunir diversas possibilidades para a solução do problema, como apresentado na tabela anterior, a professora introduziu o conceito de equações lineares com duas variáveis, como podemos ver no diálogo a seguir:

> **P**: *Quais conceitos matemáticos foram utilizados no problema?*
> *Alunos: As quatro operações e equação.*
> **P**: *O que é uma equação?*
> **A2**: *É uma igualdade em que existe um valor desconhecido que é representado por uma incógnita.*
> **P**: *No caso do nosso problema, qual a equação que foi utilizada?*
> **A1**: *Pela equação* $3{,}3x + 0{,}7y = 1880$*, onde x corresponde ao feijão e y ao peixe.*
> (Diálogo entre pesquisadora e aluno, 2019).

Nesse momento, alguns alunos mencionaram que também haviam encontrado essa equação, mas que não conseguiram associá-la à resolução do problema, pois não tiveram a percepção de que o problema poderia ter um conjunto de soluções. Por outro lado, afirmaram que, ao ver as diversas soluções do problema, não compreenderam de imediato que poderia ser representado por uma equação de duas incógnitas, sendo isso percebido apenas no momento em que a professora colocou os casos particulares de modo organizado na lousa.

A professora considerou as falas dos alunos, explanou sobre equação linear e, em seguida, formalizou o conceito e a natureza da solução: denomina-se equação linear de n variáveis a toda equação que pode ser escrita na forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$, em que $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as incógnitas, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são números reais chamados coeficientes das incógnitas e $\boldsymbol{b}$ é o termo independente. Assim, dada a equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$, dizemos que a ênupla ordenada de números reais $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ é solução da equação se, e somente se, $a_1\boldsymbol{a_1} + a_2\boldsymbol{a_2} + a_3\boldsymbol{a_3} + \ldots + a_n\boldsymbol{a_n} = b$.

Para finalizar a atividade, foi entregue a turma a segunda parte do problema (Figura 4), a qual se constituía como a condição necessária para que fosse introduzida a conversa sobre Sistemas Lineares. Assim, esperava-se que os alunos identificassem a informação dada como

uma segunda equação com duas incógnitas que, juntamente com a equação do problema anterior, formaria um Sistema Linear.

Figura 4 – Segunda parte do problema desenvolvido na Atividade 1.

Ao tentar resolver a situação, Rui descobriu que haveria muitas soluções para ela. Conforme comesse um tanto de feijão, ele teria que comer determinada quantidade de peixe para completar as Kcal. Dessa forma, Rui resolveu que comeria de peixe o dobro da quantidade que comesse de feijão. Nessas condições, quantos gramas de cada Rui deveria comer?

Atenção: *Embora tenhamos encontrado uma forma de obter as quilocalorias diárias necessárias a Rui, essa não é uma boa solução alimentar. Esses dois alimentos não fornecem a porcentagem de gordura necessária em cada refeição.*

Fonte: Adaptada de Coleção Gestar II (BRASIL, 2008, p. 115)

Com o intuito de introduzir a conversa sobre os Sistemas Lineares, a professora levantou os seguintes questionamentos: i) o que diferencia essa segunda parte da anterior? ii) a informação dada na segunda parte facilita ou dificulta a solução do problema? iii) que conteúdo matemático nos auxilia na resolução desse problema?

Para o primeiro questionamento, os alunos mencionaram que, na primeira parte do problema, eles poderiam atribuir quantidades aleatórias para cada opção, já na segunda parte, era preciso obedecer à seguinte condição: comer de peixe o dobro da quantidade de feijão. No segundo questionamento, os alunos responderam que a informação apresentada facilita, pois, levando em consideração que um valor deveria ser o dobro do outro, isso diminui as tentativas na atribuição de valores. O aluno que respondeu utilizando a relação $y = 2x$ mencionou que facilitou bem mais, já que a condição dada possibilitou um caminho eficaz para chegar à solução. No terceiro questionamento, alguns alunos responderam que o conteúdo matemático que auxiliaria a resolução do problema seria Sistemas Lineares.

Ao serem questionados sobre o porquê utilizar Sistemas Lineares, os alunos ficaram em silêncio por um instante e, em seguida, destacaram que não havia uma única equação que satisfizesse todo o problema, desse modo, seria necessário recorrer a um Sistema Linear. Dando continuidade ao diálogo, a professora questionou aos alunos: "O que são Sistemas Lineares"? De modo bastante participativo, eles foram complementando a resposta e formalizaram da

seguinte forma: "Chamamos de sistema várias equações ligadas por uma chave e, para resolvê-lo, devemos levar em consideração todas as equações".

Diante disso, a professora concluiu: um Sistema linear é um conjunto de duas ou mais equações lineares. De forma geral, um sistema linear de m equações e n incógnitas também pode ser chamado de sistema linear m × n (lê-se "m por n"). Um sistema linear $m\ x\ n$ é definido como um conjunto S de m equações e n incógnitas, conseguindo ser representado da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Em seguida, a professora retomou o problema, destacando que, na primeira parte, pedia um cardápio formado por feijão e peixe, de modo que totalizassem 1880 Kcal, em seguida, mencionou a condição da segunda parte, em que a quantidade de peixe deveria ser o dobro da quantidade de feijão. Diante disso, apresentou a solução de A6, que considerou a necessidade de encontrar uma quantidade de peixe e de feijão, de modo que satisfizesse, simultaneamente, as duas condições do problema e resolveu a questão utilizando um Sistema Linear.

Posteriormente, ocorreu o que chamamos de Exploração de Problemas, em que foi possível chegar ao que destaca Andrade (2017, p. 365): "à solução do problema, a novos conteúdos, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses".

Nessa fase, a professora questionou os alunos sobre a variação desse problema, perguntando quais seriam as outras condições para a criação de um novo cardápio. À medida que se lançava o questionamento, a turma ia respondendo. Dentre os problemas criados e resoluções dadas, podemos destacar os seguintes: i) E se ele comesse o triplo de peixe? R. Considerando o feijão x e o peixe y, representaríamos por y= 3x; ii) E se ele não quisesse comer feijão, apenas peixe? R. Facilitaria ainda mais, pois poderíamos representar por uma equação com apenas uma incógnita: 0,7y = 1880; iii) E se ele resolvesse adicionar legumes ao prato? Bem, aí deveria ter as informações da quantidade de calorias por gramas de legumes, então já representaríamos por uma equação com três variáveis.

No decorrer da Oficina ficou perceptível um significativo avanço, no qual os alunos passaram a apresentar domínio na representação algébrica, utilizando esta como uma linguagem

matemática para expressar a resolução do problema, não recorrendo imediatamente a tentativa e erro como no início da Oficina.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo teve como objetivo apontar as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Exploração, Proposição e Resolução, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra, no ensino de Sistemas Lineares na licenciatura. Para tanto, foi apresentada a descrição, discussão e análise de uma atividade desenvolvida na pesquisa de Martins (2019), a qual teve como intuito: i) Representar problema por meio de equação linear com duas incógnitas; ii) Explorar o conceito de soluções de uma equação linear com duas incógnitas; iii) Introduzir conversa sobre Sistemas Lineares.

Como discutido no decorrer deste artigo, as maiores dificuldades enfrentadas no ensino de Sistemas Lineares estão relacionadas ao seu significado, aos processos de resolução, à tradução da linguagem verbal para a linguagem matemática e à natureza de sua solução. Diante disso, pode-se afirmar, a partir deste trabalho, que uma alternativa viável para minimizar tais dificuldades consiste na introdução deste conteúdo através da Resolução de Problemas, pois é uma forma mais significativa do aluno compreender a importância deste conteúdo, atribuindo significado aos processos realizados.

O interesse em introduzir o conteúdo através da Resolução de Problemas não tem somente a preocupação de atribuir significado aos processos de resolução, mas preencher a lacuna existente entre a utilização das representações por parte dos alunos, sobretudo entre as representações numérica, algébrica e verbal, sendo exatamente esta a sequência em que os alunos utilizam na resolução. Nesse sentido, ao apresentar o problema em sua forma verbal, acredita-se que o aluno pode sentir, inicialmente, um desconforto, no entanto, esta pode ser uma alternativa para que ele realize um trabalho efetivo no decorrer da resolução, e não uma mera execução de métodos.

Vale salientar que a importância dos métodos de resolução de sistemas é indiscutível, porém, compreendemos que é preferível ao aluno compreender o conceito e somente após isso, dominar as técnicas.

Compreende-se que o licenciando precisa estar em contato, em sua formação, com situações que o levem a refletir e compreender a matemática como campo de conhecimento, para que, dessa forma, o conhecimento construído possa ampliar a visão dos futuros professores

e proporcionar, futuramente, o desenvolvimento de práticas em sala de aula que levem uma matemática com mais compreensão e que, principalmente, faça sentido para os seus alunos.

Nesse sentido, acredita-se que a pesquisa despertou nos licenciandos o interesse em revisar os conteúdos da Educação Básica e os explorá-lo com profundidade e diversidade, relembrando-os sobre os seus compromissos com este público.

Nessas condições, acredita-se ter contribuído para a formação dos participantes da Oficina, ao proporcionarmos experiências com a utilização da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas como Metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática, possibilitando, assim, reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares, aliado ao uso das Representações Múltiplas de Álgebra, como também, na construção de uma nova postura frente ao ensino de Sistemas Lineares.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista. 1998.

ANDRADE, S. Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula. In L. R. Onuchic, L. C. Leal Junior e M. Pironel (Eds.), **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física. 2017. p. 355-396.

BATTAGLIOLI, C. S. M. **Sistemas Lineares na segunda série do ensino médio: um olhar sobre os livros didáticos.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2008.

BERTOLAZI, K. S. **Conhecimentos e Compreensões revelados por estudantes de Licenciatura em Matemática sobre Sistemas de Equações Lineares.** Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Londrina: Universidade Estadual de Londrina. 2012.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). **Orientações curriculares para o Ensino Médio:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. MEC: Brasília. 2006.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II.** Matemática: Atividades de Apoio à Aprendizagem 6 - AAA6: matemática nas migrações e em fenômenos cotidianos (Versão do Aluno). MEC: Brasília. 2008.

FIORENTINI, D., OLIVEIRA, A. T. C. C. Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? **Bolema**, n.27, v.47, p.917-938. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000400011. 2013.

FRIEDLANDER, A., TABACH, M. Promoting Multiple Representations in Álgebra. In A. A. Cuoco e F. R. Curcio (Eds.). **The roles of representation in school mathematics** (Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. (p.173-185). Reston, VA: NCTM. 2001.

JORDÃO, A. L. I. **Um Estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio**. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2011.

MARTINS, F. C. **Ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares na Formação do Professor de Matemática via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas.** 2019, 138 p. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Campina Grande, 2019.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **Princípios e normas para a matemática escolar.** Tradução: Magda Melo. 2. ed. Associação Portuguesa de Matemática: Lisboa. 2000.

PONTE, J. P., BRANCO, N., MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: Ministério da Educação. 2009.

RANGEL, W. S. A. **Projetos de Modelagem Matemática e Sistemas Lineares: contribuições para a formação de professores de matemática.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto. 2011.

ZUIN, E. S. L., SANTOS, C. M. **Sistemas de equações lineares:** entre a História da Matemática e a História da Educação Matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física. 2019.