



CombInter: repercussões no processo de ensino e aprendizagem de análise combinatória

Dayvid Evandro da Silva Lós¹ • Cristine Martins Gomes de Gusmão²

RESUMO

O ensino e aprendizagem de análise combinatória na educação básica é tido como uma área problemática por professores e alunos. Nesse contexto, este estudo tem como objetivo analisar a influência do objeto de aprendizagem CombInter no ensino e aprendizagem de análise combinatória. Para isso, o CombInter foi utilizado por um professor de matemática em uma turma do segundo ano do ensino médio durante as aulas de análise combinatória. A partir das análises de entrevistas realizadas com um grupo de estudantes e o professor, constatou-se que o CombInter traz funcionalidades relacionadas aos conceitos estudados importantes para aprendizagem do conteúdo, tais como: a forma de abordagem dos conceitos, situações-problema e soluções, dicas, simulações e relatórios de aprendizagem. Além das funcionalidades, foi destacado que a abordagem e a condução da aula com o CombInter contribuíram para a formação de grupos de estudos, o estudo independente, uma maior participação dos estudantes e o aumento de questionamentos de ordem superior.

Palavras-chave: Objeto de aprendizagem; Análise combinatória; Ensino médio; Aprendizagem; Metacognição.

CombInter: impacts on the teaching and learning process of combinatorics

ABSTRACT

The teaching and learning of combinatorics in basic education is often regarded by both teachers and students as a problematic area. In this context, the present study aims to analyze the influence of the learning object CombInter on the teaching and learning of combinatorics. To this end, CombInter was used by a mathematics teacher with a second-year high school class during combinatorics lessons. Based on the analysis of interviews conducted with a group of students and the teacher, it was found that CombInter offers functionalities related to the studied concepts that are important for content learning, such as the approach to concepts, problem situations and their solutions, tips, simulations, and learning reports. In addition to these functionalities, it was highlighted that the use and instructional approach with CombInter contributed to the formation of study groups, independent learning, increased student participation, and a rise in higher-order questioning.

Keywords: Learning object; Combinatorics; High school; Learning; Metacognition.

CombInter: Impactos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la combinatoria

RESUMEN

La enseñanza y el aprendizaje de la combinatoria en educación básica suelen ser considerados un área problemática tanto por docentes como por estudiantes. En este contexto, el presente estudio busca analizar la influencia del objeto de aprendizaje CombInter en la enseñanza y el aprendizaje de la combinatoria. Para ello, un profesor de matemáticas de segundo de bachillerato utilizó CombInter durante las clases de combinatoria. A partir del análisis de entrevistas realizadas a un grupo de estudiantes y al profesor, se observó que CombInter ofrece funcionalidades relacionadas con los conceptos estudiados, importantes para el aprendizaje de los contenidos, como el enfoque conceptual, las situaciones problemáticas y sus soluciones, consejos, simulaciones e informes de aprendizaje. Además de estas funcionalidades, se destacó que el uso y el enfoque instruccional de CombInter contribuyeron a

¹ Universidade Federal de Pernambuco • Recife, PE — Brasil • ✉ dayvid.faculdade@gmail.com • **Orcid** <https://orcid.org/0000-0002-8924-1737>

² Universidade Federal de Pernambuco • Cidade, UF — Brasil • ✉ cristine.gusmao@ufpe.br • **Orcid** <https://orcid.org/0000-0001-8831-217X>

Recebido em 30/05/2025 • Aprovado em 11/08/2025 • Publicado em 14/09/2025

la formación de grupos de estudio, el aprendizaje autónomo, el aumento de la participación estudiantil y el incremento de las preguntas de orden superior.

Palabras clave: Objeto de aprendizaje; Combinatoria; Escuela secundaria; Aprendizaje; Metacognición.

INTRODUÇÃO

O ensino de matemática, historicamente, é marcado por taxas insatisfatórias de aprendizagem. Considerando os resultados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) referentes ao ano de 2021, no 5º ano do ensino fundamental, 57,6% dos alunos encontram-se até o nível 4 de proficiência (de uma escala de nível 0 ao 10), com média de proficiência igual a 217 (de 0 a 350 pontos); no 9º ano do ensino fundamental, 62,6% dos alunos encontram-se até o nível 3 (de uma escala de nível 1 ao 9), com média de proficiência igual a 256 (de 200 a 400); e, no 3º ano do ensino médio, 71,6% dos alunos encontram-se até o nível 3 (de uma escala de nível 1 ao 10), com média de proficiência igual a 270 (de 225 a 450 até o nível 9 e maior ou igual a 450 no nível 10) Ministério da Educação [MEC] (2022).

No que se refere ao ensino médio, por exemplo, pode-se dizer que tais estudantes, provavelmente, têm dificuldade em habilidades presentes, respectivamente, nos níveis 4, 7 e 8 de proficiência, tais como resolver problemas de contagem usando princípio multiplicativo, permutação e arranjo, conceitos esses relacionados ao estudo de análise combinatória (MEC, 2022).

São várias situações relacionadas à área de combinatória que vêm contribuindo para que sua aprendizagem seja comprometida. Conforme Lós e Gusmão (2025), os alunos possuem dificuldades em compreender os invariantes combinatórios, devido, principalmente, à forma de ensino do professor ainda caracterizada pelo modelo mecânico; às dificuldades conceituais dos professores relacionadas à área, fazendo com que vários evitem abordar o tema durante suas aulas ou que abordem o conteúdo a partir de definições e repetição de modelos únicos de exercício, com ênfase em fórmulas e algoritmos; e à falta de recursos didáticos diferentes para que o professor possa aprender o conteúdo, bem como auxiliar em suas aulas.

O desenvolvimento de metodologias e recursos didáticos que possam amenizar tal situação é uma tarefa constante de pesquisas no Brasil e no mundo, com intuito de que se possa educar melhor matematicamente um maior quantitativo de pessoas. De acordo com Lós e Gusmão (2025), alguns recursos vêm sendo abordados nas aulas de combinatória, como: material concreto, jogos digitais e o *software* Pixton. Tais recursos facilitaram o entendimento

e a compreensão do tema, tornando as aulas mais participativas, atraentes, produtivas, interessantes, dinâmicas e significativas para os alunos.

Os objetos de aprendizagem³ vêm sendo uma aposta nesse sentido, pois são relativamente simples de usar, possuem uma abordagem pedagógica melhor definida em relação a outros recursos, podem ser usados em diversas plataformas, além de aproveitar o potencial da tecnologia para facilitar a abordagem de conteúdos abstratos.

Considerando a problemática apresentada, este estudo teve como objetivo analisar a influência do objeto de aprendizagem CombInter no ensino e aprendizagem de análise combinatória⁴.

O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

A análise combinatória é uma área da matemática que analisa estruturas e relações discretas, abrangendo, geralmente, um perfil de problemas preocupados em demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições, e contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas (Morgado *et al.*, 2016).

São várias as situações relatadas pelos pesquisadores que dificultam a aprendizagem de análise combinatória na educação básica. As principais dificuldades apresentadas pelos estudantes estão relacionadas à dificuldade de interpretação dos problemas com ênfase na incompreensão dos invariantes combinatórios de escolha, de ordem e esgotamento de possibilidades (Borba, 2017; Montenegro, 2018) e baixo repertório de representações simbólicas (Coelho; Dias, 2022; Lima; Borba, 2018), tendo como origem um ensino pautado majoritariamente por aplicação de fórmulas em situações padronizadas (Georgiev; Andreev, 2021; Jacoby, 2019).

Essa não compreensão pode ser percebida quando o estudante repete os mesmos agrupamentos trocando-se apenas a ordem dos elementos, o que é mais comum no ensino fundamental (Borba, 2017; Lima; Borba, 2018; Montenegro, 2018) e quando o estudante é acostumado a trabalhar com situações padronizadas, nas quais ele sabe de antemão qual tipo de

³ Nesta pesquisa, quando nos referirmos a objetos de aprendizagem, estamos levando em consideração uma perspectiva digital, conforme Wiley (2000). Para Wiley (2000, p. 8), objeto de aprendizagem é “qualquer recurso digital que pode ser reutilizado para apoiar a aprendizagem”.

⁴ Este artigo é recorte de uma tese defendida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, escrita pelo primeiro autor e orientada pela segunda autora.

agrupamento e, posteriormente, migra para situações combinatórias quaisquer (Carneiro, 2019; Jacoby, 2019).

Já em relação às dificuldades dos docentes, as pesquisas indicam um baixo repertório metodológico ao ensinar análise combinatória (Assis; Pessoa, 2018; Nunes; Vidal, 2017) e pouco conhecimento específico do conteúdo (Martins, 2018; Silva *et al.*, 2019). Tais lacunas têm origem na formação docente deficiente que nem sempre o tópico de combinatória foi abordado (Assis; Pessoa, 2018; Martins, 2018), bem como no material didático disponibilizado, este com pouca diversidade de situações combinatórias, invariantes e representações simbólicas (Martins; Borba, 2021). Além disso, alguns professores, mesmo com formação, não conseguiram aprender os conceitos de modo satisfatório (Coelho; Dias, 2022; Martins, 2018; Semanišínová, 2021).

Na educação infantil e ensino fundamental, essa situação faz com que os professores não consigam criar condições facilitadoras que promovam a aprendizagem. Já no ensino médio, o que se vê é um ensino baseado puramente por meio de fórmulas e algoritmos. Tal perspectiva contribui para que docentes estimulem uma aprendizagem baseada em exercícios padronizados que promovem a aplicação de fórmulas conforme os dados do problema, reduzindo, consideravelmente, as oportunidades de refletir sobre o problema.

Considerando a problemática envolvida com o ensino e aprendizagem de análise combinatória abordada anteriormente, vários trabalhos destacaram que a ação docente de questionar os estudantes seja no processo de resolução de problemas ou mediando algum experimento a partir de algum recurso pedagógico favorece a aprendizagem dos conceitos combinatórios (Lockwood; De Chenne, 2021; Montenegro, 2018; Soto; Siy; Harel, 2022). Esses questionamentos devem ser realizados com intuito de criar processos, insights e estratégias próprias que estimulem a criatividade e autonomia dos alunos (Santos, 2019), para que favoreçam a reflexão sobre o que se está fazendo, de modo que seja criado um ambiente de diálogo e cooperação entre os estudantes e o professor (Antonides; Battista, 2022; Santos, 2019).

Desse modo, questionamentos/problematizações podem contribuir para compreender invariantes, organizar e sintetizar as ideias e, por conseguinte, delimitar as estratégias de resolução para os diferentes tipos de problemas combinatórios (Gadelha; Borba; Montenegro, 2021; Santos, 2019). Abordagens e/ ou recursos de ensino – resolução de problemas, gamificação, história e modelagem matemática, jogos, *softwares*, material concreto – que deem

autonomia aos alunos também são evidenciados, pois permitem que os estudantes exponham suas formas de pensar, permitindo intervenções mais assertivas por parte dos professores (Araújo; Santos, 2019; Bastos; Lopes; Victor, 2020; Batista, 2020; Brito; Almeida, 2022; Gadelha; Borba; Montenegro, 2021; Montenegro, 2018).

FORMAÇÃO E DESENVOLVIMENTO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS

Para Vergnaud (1986), a Combinatória faz parte do campo conceitual das estruturas multiplicativas e considera os problemas relacionados a essa área como produtos de medidas. Tais problemas envolvem uma relação ternária, isto é, três variáveis das quais uma quantidade é produto das outras duas. Para este autor, um campo conceitual pode ser definido como “um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão” (Vergnaud, 1986, p. 84). Já os conceitos, Vergnaud os considera como o tripé de três conjuntos: situações em que o conceito pode ser apresentado (a variedade das classes de problemas possíveis); invariantes, que são as diferentes propriedades do conceito relacionadas às diversas situações; e as representações simbólicas que podem ser utilizadas. De modo geral, Vergnaud (1986) destaca que o aluno, ao ter experiências com diversas situações de problemas, mobiliza diversos invariantes e representações simbólicas, favorecendo a apreensão dos conceitos.

Duval (2003), em sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica, expande a discussão acerca das representações simbólicas, esmiuçando as maneiras que as relações entre as diversas representações interferem na compreensão dos conceitos matemáticos. Argumenta que o saber matemático se diferencia dos demais ao afirmar que a matemática “existe” por meio de representações que o sujeito realiza, desde a linguagem materna, gráficos, tabelas, a uma fórmula, algumas mais próximas do conhecimento prévio dos estudantes, outras mais distantes. De caráter peculiar, chama atenção para as transformações de representações como fundamental para compreensão matemática, entretanto, esse processo exige atenção, pois “passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou aspectos diferentes de um mesmo objeto” (Duval, 2003, p. 22). Quando o grau de dificuldade das conversões é alto – é o que ele chama de não congruência – é necessário trabalhar com registros de representação auxiliares de transição. Isso ocorre, por exemplo, na resolução de problemas combinatórios (Montenegro, 2018).

O OBJETO DE APRENDIZAGEM COMBINTER

O CombInter⁵ – Combinatória Interativa – é um objeto de aprendizagem, do tipo *software* educacional, desenvolvido para auxiliar alunos e professores no estudo de análise combinatória. O CombInter disponibiliza conceitos e problemas com ênfase na diversificação de situações, invariantes e representações simbólicas relacionados aos conceitos combinatórios. Durante a interação com as situações problema, os estudantes poderão simular situações de contagem relacionadas ao enunciado do problema, bem como obter auxílios com *feedbacks* que proporcionam a compreensão do problema e o desenvolvimento de estratégias de solução. Tais elementos possibilitam ao estudante compreender os principais conceitos de análise combinatória, a saber: Princípio Fundamental da Contagem, Arranjos, Permutações e Combinações. Na figura 1, por exemplo, apresentamos a tela principal do CombInter.

Figura 1 – Tela principal do CombInter



Fonte: elaborado pelo autor.

O CombInter foi construído seguindo as etapas da metodologia de desenvolvimento de objetos de aprendizagem INTERA (Braga; Pimentel; Dotta, 2015), a saber: contextualização, requisitos, arquitetura, desenvolvimento, testes e qualidade, disponibilização e avaliação. A seguir, destacamos as principais funcionalidades do CombInter:

⁵ O CombInter pode ser acessado por meio do link: <https://sites.google.com/view/combinter/>. Para acessar o CombInter, utilize o email professor@combinter.com e senha professor123, caso deseje visualizar o perfil de professor ou utilize o email aluno@combinter.com e senha aluno123, caso deseje visualizar o perfil de estudante.

- *Conceitos*: Dispõe dos principais conceitos de análise combinatória e diversos problemas resolvidos, com ênfase em definições, demonstrações, diversidade de situações e várias formas de representação;
- *Diversidade de situações-problema*: Propicia aos estudantes a interação com uma diversidade de situações-problema, com diferentes níveis de dificuldade, invariantes conceituais e representações simbólicas, relacionadas aos principais conceitos de análise combinatória;
- *Dicas*: Oferece questionamentos interativos que provocam reflexões relacionadas aos invariantes dos conceitos envolvidos com a situação-problema, com objetivo de desencadear processos mentais que levem à compreensão e ao desenvolvimento de estratégias de solução;
- *Simulações*: Dispõe de mecanismos de interação que permitem o estudante manipular e obter respostas com *feedbacks* em tempo real;
- *Feedbacks*: São recursos presentes nas dicas e simulações que permitem ao estudante saber se houve um acerto ou erro e entender os motivos que levaram a isso, no sentido de conscientização dos processos mentais. E isso de forma não generalizada (por exemplo, ao errar o problema), mas de forma específica, uma vez que permite ao estudante identificar com maior critério os aspectos conceituais que o estudante havia internalizado e os que precisava aprender;
- *Soluções*: Em todas as situações-problema são explicitados e ratificados os processos conceituais apresentados nas simulações e dicas, de modo que os estudantes possam perceber as suas funções durante a construção de um ou mais planos de solução. Além disso, o estudante pode comparar a sua solução com a do CombInter, observando as estratégias tomadas, bem como tendo acesso a mais de uma forma de solucionar o problema;
- *Veja mais*: São situações-problema parecidas com os problemas iniciais. Permite que o estudante tenha um novo olhar acerca do problema principal, reavaliando suas estratégias anteriores – revisitando simulações, dicas e soluções – para que, após alguns ajustes, possam ser utilizadas em um novo problema. Possibilita que o estudante tome consciência de que um problema pode ser observado sob diversos aspectos e critérios, revelando diversos modos de pensar acerca do mesmo conceito;

- *Relatórios*: são recursos que possibilitam ao professor acompanhar em tempo real como os estudantes estão interagindo com o OA, a partir de dados relevantes sobre o estado de aprendizagem dos estudantes.

O CombInter foi desenvolvido pelo autor deste estudo com a participação de uma equipe de profissionais ligados à área de computação. Durante o seu desenvolvimento, foram utilizados os aportes teóricos e revisões de literatura abordados anteriormente como forma de contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos relacionados à análise combinatória.

A seguir, apresentamos a metodologia adotada neste estudo, evidenciando a sua abordagem, o local da pesquisa e a forma de coleta e análise dos dados.

METODOLOGIA

Como o objetivo deste estudo é analisar a influência do objeto de aprendizagem CombInter no ensino e aprendizagem de análise combinatória, adotamos, para esse momento, uma metodologia com abordagem qualitativa, pois “tem como foco entender e interpretar dados e discursos, mesmo quando envolve grupos de participantes” (D’Ambrósio B.; D’Ambrósio U., 2006, p. 78).

Para isso, foi selecionado o Instituto Federal de Alagoas (IFAL), Campus Arapiraca, localizado no município de Arapiraca-AL, para que o CombInter fosse utilizado pelo professor de matemática, em uma turma de 41 estudantes do segundo ano do ensino médio. Durante as aulas, foram abordados os conceitos de princípio fundamental da contagem, permutação simples, permutação com elementos repetidos, arranjo e combinação, os quais foram discutidos durante a oferta de 18 aulas com duração média de 50 minutos. De modo geral, o professor adotou a seguinte abordagem de aula:

- Antes de iniciar o conteúdo, houve apresentação das principais funcionalidades do CombInter para os alunos;
- As aulas se deram de forma predominantemente expositiva, adotando uma abordagem próxima dos conceitos de combinatória apresentados no CombInter;
- A exposição das aulas iniciava com exemplos / situações-problema elementares de modo que os alunos pudessem perceber a importância da análise combinatória cotidianamente, além de iniciar uma familiarização com os invariantes dos conceitos. Em seguida, o

professor realizava a formalização do conceito (definições e fórmulas) e discutia situações-problema a resolver com os estudantes;

- Durante a exposição do conceito, o professor promoveu questionamentos relacionados aos invariantes dos conceitos e às situações-problema, de modo que proporcionassem um ambiente de diálogo, em que os estudantes se sentiam convidados a participar das discussões. Durante o processo de solução das situações-problema na lousa, foi priorizada uma solução construtiva e detalhada, com evidência dos invariantes dos conceitos relacionados ao problema. Desse modo, foi incentivado que os estudantes também priorizassem, durante o processo de resolução de situações-problema, uma solução construtiva e detalhada, destacando os invariantes dos conceitos;
- Como tarefa para casa, o professor solicitava que os estudantes, a partir do uso do CombInter, fizessem a leitura do conceito abordado em sala, bem como a leitura do novo conceito que seria abordado na aula seguinte. Além disso, especificava algumas situações-problema relacionadas ao conceito trabalhado para serem respondidas por meio do CombInter, de modo que tais atividades pudessem ser concluídas antes da discussão de um novo conceito. Como mecanismo que incentivasse o uso do CombInter, foram solicitados, pelo professor, a entrega de um resumo / *flashcards*⁶ / mapa mental, elaborado a partir da leitura do conceito discutido na sala de aula, bem como a resolução escrita das situações-problema indicadas. Essas últimas com o objetivo de estimular uma resolução construtiva e detalhada a partir do CombInter;
- Em alguns momentos, o professor propôs algumas atividades para serem trabalhadas com o CombInter durante as aulas, com objetivo de promover a familiarização dos recursos do sistema, bem como de esclarecer dúvidas e observar como os estudantes interagem com o CombInter.

Durante as aulas, o pesquisador elaborou diários de bordos a partir da observação dos estudantes ao interagir com o CombInter durante as aulas. Ao final das aulas, foram feitas entrevistas com o professor e 11 estudantes selecionados por participação ativa nas discussões. Os dados obtidos foram organizados em categorias de modo a facilitar o processo de análise. De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2009), esse processo visa agrupar os dados com

⁶ Flashcards são cartões de estudo que ajudam a memorizar informações.

características comuns em categorias de modo que a análise/interpretação seja mais precisa e promissora para responder aos questionamentos da pesquisa. Identificamos o professor como Professor 1 e os estudantes como Estudante 1, Estudante 2, Estudante 3, Estudante 4, Estudante 5, Estudante 6, Estudante 7, Estudante 8, Estudante 9, Estudante 10 e Estudante 11.

REPERCUSSÕES NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM CombInter e a aprendizagem em análise combinatória

A partir de entrevistas realizadas com o professor e alguns estudantes, foi possível identificar elementos presentes no CombInter ou na aula do professor que, para os estudantes e/ou professor, influenciaram a aprendizagem em combinatória.

Inicialmente, os entrevistados identificaram alguns aspectos nas discussões feitas sobre os *conceitos* de análise de combinatória no CombInter que influenciaram a compreensão:

Estudante 5: *Achei bom porque ele começava simples e ia aumentando um pouquinho a dificuldade ao decorrer do que você ia lendo.*

Estudante 7: *Trazer vários exemplos em diversos contextos e responder enquanto explica ajudou bastante.*

Estudante 9: *Com os exemplos, consegui entender melhor o assunto, porque o conteúdo pode ser o mesmo, pode ser a mesma regra, mas existem vários casos, alguns mais específicos, mais difíceis do que outros. E, você saber como resolver alguns casos ajuda, porque você pega o raciocínio para ajudar a resolver outros casos parecidos.*

Estudante 10: *Se você lê só o texto, não consegue visualizar muito bem. Com as representações, fica melhor entender as explicações que foram feitas; ajudava a visualizar.*

Estudante 11: *Gostei por ter muitas representações, porque isso ajuda a gente a compreender os exemplos que estavam no CombInter.*

Professor 1: *A organização e a estruturação favorecem a aprendizagem, principalmente de quem está iniciando.*

É possível observar, a partir das falas, que, na abordagem dos conceitos, torna-se importante estabelecer uma gradação em relação ao nível dos exemplos; promover uma diversidade de representações simbólicas durante a discussão dos conceitos (enunciado dos exemplos e soluções); e disponibilizar diversos exemplos resolvidos em termos de contexto e propriedades conceituais. Tais achados vão ao encontro de Vergnaud (1986), uma vez que, segundo o autor, trabalhar com uma diversidade de situações-problema contribui para perceber as propriedades relativas ao conceito estudado, influenciando o processo de conceitualização.

As representações citadas pelos estudantes 10 e 11 relacionam-se ao que Duval chamou de representações intermediárias que, segundo autor, auxiliam para que o estudante identifique e interprete o cálculo numérico relacionado à situação-problema (Duval, 2012). Outro aspecto destacado pelos sujeitos da pesquisa foi acerca da funcionalidade *Simulação* presente no CombInter. Sobre isso, argumentaram:

Estudante 2: *A simulação conseguia fazer com que eu visse o problema. No caso, visualmente, não só na minha cabeça. Por exemplo, o problema de ordenar objetos, fazer contagem, era mais fácil eu ir à simulação e colocar, do que eu simplesmente pensar no abstrato. Escrever ajudava também, mas acho que ver e montar era mais interessante.*

Estudante 5: *A simulação é muito interativa. Ajudava a compreender a questão.*

Estudante 9: *Com as simulações posso testar para ver se compreendi realmente a lógica do assunto, se tenho ido no caminho certo e para ver se posso seguir com aquela lógica. Me ajuda a entender melhor o assunto e a resolver as questões de uma forma mais rápida, mais fácil.*

Estudante 10: *As simulações me ajudavam em uma questão que eu achava que, por exemplo, algum determinado caso iria funcionar. E, às vezes, não funcionava. Na simulação, você conseguia ver.*

Estudante 11: *Muitas simulações davam meio que um bizu na hora que você estava fazendo ali a simulação. Aí, você, ah, é isso! Aí, você voltava lá, fazia o cálculo e estava certa a resposta.*

Professor 1: *Por vezes, quando o texto é apresentado, no primeiro momento pode acontecer de o aluno achar que entendeu. E, aí, uma forma dele validar o que ele fez, o que ele leu, o que ele compreendeu, é ele fazer as simulações. Inclusive, eu tive relatos de um aluno que quando leu o exemplo supostamente conseguiu entender. Quando foi para as simulações, não conseguiu acertar sempre.*

Desse modo, as simulações permitiram que os estudantes testassem as opções de contagem de acordo com suas interpretações iniciais acerca do problema. Nesse processo, foi possível construir uma compreensão do problema compatível com o enunciado, uma vez que os invariantes dos conceitos eram explicitados durante a interação, estimulando um processo de tentativa e erro que proporcionava testar agrupamentos compatíveis e as possíveis relações entre esses agrupamentos. A dinâmica de tentativa e erro proporcionou o que Vergnaud (1986) chamou de conflito entre concepções. Isto é, a partir de concepções iniciais obtidas por meio da leitura da situação-problema, o estudante pode testar com as simulações e, mediante os *feedbacks* informados, conflitos foram gerados de tal modo que favoreceram o abandono das concepções incorretas. De forma complementar a esse processo de simulação, os sujeitos evidenciaram o papel da funcionalidade *Dicas* em seu processo de aprendizagem:

Estudante 1: *As dicas ajudaram muito. Porque, quando eu tentava fazer os cálculos e dava errado, recorria para as dicas para ver o que pode ter ali para me ajudar a ter mais uma noção do que estou esquecendo, do que estou colocando a mais. Aí, usando as dicas, deu para tentar entender, ver se alguma coisa estava faltando.*

Estudante 4: *A dica deixava uma interrogação na cabeça. Fazia a gente pensar. Não era como as dicas de outros sites, que davam praticamente a questão toda pronta. Ela contextualizava tal coisa e pedia até para gente fazer algumas questõezinhas. Isso fazia a gente pensar, mas, ao mesmo tempo, também, ajudava a gente a compreender melhor a questão para gente conseguir responder corretamente.*

Estudante 5: *Muitas vezes tinha questão que eu achava que estava certa e eu viajava bastante nas possibilidades. Sem as dicas, eu não ia ter conseguido meio que voltar para a realidade do problema. Percebi muitas situações que eu estava me perdendo muito no que o problema realmente queria. E, as dicas me direcionavam de volta para o que o problema estava solicitando.*

Estudante 7: *Gostei delas. Para ser sincera, tinha hora que eu fazia a dica e dava uma coisa errada. Aí, eu ficava tipo, poxa, mas como que eu errei? Aí, eu ia ler de novo, para tentar entender. Ah, eu errei isso aqui. Aí, eu olhava de novo, sabe? É uma maneira de aprender, né? Você aprende com erro também. Então, fazer as dicas ajudava tanto na compreensão da questão, para ver o que ela estava te pedindo, por mais que você errasse, quanto na compreensão da própria dica. Porque tinha dica que você pensava em uma coisa, só que se você lesse de novo, era outra.*

Estudante 11: *As dicas se construía. Elas se interligavam. A dica 1 podia complementar o seu pensamento ao interagir com a dica 2, e a dica 2 podia complementar o seu pensamento ao interagir com a dica 3, e, assim, sucessivamente.*

Professor 1: *As dicas conduzem os estudantes à construção da solução de forma autônoma. [...] o CombInter consegue desembaraçar o problema. Não só no sentido da solução propriamente dita, mas na construção das ideias.*

Percebe-se, nas falas, que as dicas contribuíram para um processo reflexivo constante, a partir da relação entre os fatores conceituais relevantes para compreensão do problema e elaboração de estratégias de solução, e os condicionantes trazidos pelo problema. Além disso, permitiam aos estudantes identificar os seus erros/acertos e entendê-los de acordo com cada aspecto conceitual inerente ao problema, uma vez que a maioria das dicas era realizada em forma de *questionamento*. A esse processo de consciência acerca de suas ações ao tentar solucionar uma situação-problema, relaciona-se o desenvolvimento da capacidade metacognitiva dos estudantes (Fernandes, 1989). Sobre os questionamentos, argumentaram:

Estudante 4: *As primeiras dicas nos dão questionamentos que fazem a gente pensar, não dão algo direto. Isso ajudou bastante a compreender melhor o assunto.*

Estudante 5: *E, principalmente, as que eram várias perguntinhas. Porque, se eu entrasse numa dica que fosse só uma, eu ia responder, mas ia ficar meio perdida. E, com várias, quando vou respondendo, meio que vou entendendo o porquê daquela decisão.*

Estudante 9: *A dica lhe dá um questionamento como se fosse parecido com o problema – de acordo com o problema, resolver isso – para ver se está de acordo com aquela linha de raciocínio. Foi isso que achei mais interessante do que só um texto corrido e explicando como você poderia resolver.*

Estudante 11: *Os questionamentos faziam a gente entender, questionar. Aí, a gente ia com aquilo na mente e dizia, nossa, era isso?*

Esse exercício do pensar comentado pelos estudantes se deu exatamente pela caracterização das dicas no CombInter, isto é, por envolverem elementos-chave relacionados ao conceito e ao problema em forma de questionamento. Tais características nos permitem entender, de certo modo, as dicas como um processo de ensino explícito de aspectos metacognitivos (Fernandes, 1989). A dinâmica proporcionada pelas dicas conduzia o estudante a um processo de conscientização dos processos mentais que favorecia a resolução do problema, conforme comentário acima (estudante 5). Isso tornou-se possível devido aos *feedbacks* que foram implementados nas simulações e nas dicas que, segundo os entrevistados, exerceram funções importantes, a saber:

Estudante 4: *E, realmente, é bem interessante a gente ter esse feedback ao acertar, ao errar, para gente ver o que a gente está fazendo de errado e conseguir corrigir isso.*

Estudante 6: *Quando errava, aparecia, lembre-se de tal coisa. Aí, já estimulava a gente. Se aparecesse só a resposta errada, a gente nunca ia saber o porquê de a gente estar errando as dicas. Aí, você se tocava do porquê de aquilo estar errado. Aí, você já tinha uma ideia de como seria o certo.*

Estudante 9: *O feedback mostra onde você está errando e onde você está acertando, e lhe dá meio que um caminho para você melhorar naquilo que você não compreendeu e lhe dá a chance de tentar novamente.*

Professor 1: *Esse feedback é dando a justificativa. Não eram justificativas superficiais. Eram bem detalhadas. [...] Quando colocada alguma coisa errada, o CombInter entrega para o aluno o porquê de estar errado e convida o aluno a pensar de outra maneira. E, não só isso, em dados momentos colocava mais de uma maneira de pensar.*

A partir das falas, nota-se a importância de saber que houve um acerto e/ou erro e entender os motivos que levaram a isso, no sentido de conscientização dos processos mentais. E, isso não de forma generalizada (por exemplo, ao errar o problema), mas de forma específica (como nas simulações e nas dicas), uma vez que permitiu ao estudante identificar com maior critério os aspectos conceituais que o estudante havia internalizado e os que precisava aprender,

conforme observado no comentário do estudante 6. O estímulo citado pelo estudante 6 e o entusiasmo dos demais sujeitos estão relacionados à motivação para aprendizagem e menor risco de frustração proporcionados pelos *feedbacks* (Sun; Wang; Chan, 2011). Como forma de relacionar/comparar/analisar as interpretações tidas durante a interação com as simulações e as dicas com um ou mais planos de solução, os estudantes puderam acessar *as soluções* dos problemas. Sobre essa experiência, relataram:

Estudante 1: *Quando resolvi o problema, às vezes, não tinha a total dimensão de como fazer cada processo, de como realizar o cálculo do problema. E, com a descrição detalhada da solução, permitia tentar entender mais o que estava faltando, uma coisa que eu estava em dúvida, que eu, ah, tem alguma coisa errada, vou acrescentar isso para ver se dá certo. Ai, deu. Mas vou olhar na solução porque aquilo era certo.*

Estudante 1: *Na solução, estava “de acordo com a dica 1 e 2”. Ai, eu, ó, a dica ajudou a perceber que era dessa maneira. De acordo com a dica 3 e 4, faz isso e isso e isso. Então, a forma de aplicar as dicas na solução é uma forma de incentivar mais e perceber “ah, olhei a dica 1 e não consegui entender a dica 1”. Ai, lá na solução, poderia ajudar a entender como era que aquela solução ia se dar com aquela dica.*

Estudante 3: *Mesmo que o aluno tenha entendido ou acertado, a solução pode mostrar outra perspectiva de raciocínio para resolver o problema. Então, é bom para o aluno expandir os horizontes dele.*

Estudante 6: *Se a gente saísse ainda com alguma dúvida que as dicas não conseguiram suprir, a solução supria, porque ela dava não só uma, mas várias. Então, a gente conseguia entender o problema sob diversos aspectos, diversos olhares.*

Estudante 10: *Às vezes, você acha que compreendeu, mas, às vezes, não. Por exemplo, você vê uma questão, aí, ficava na dúvida como ela respondia. Às vezes, acabava respondendo por arranjo e dava certo, mas você não sabia porque era arranjo. Ai, a solução ajudava a entender porque foi com aquilo e não com outra coisa.*

Professor 1: *O acesso às soluções detalhadas possibilita aos alunos entendê-las, melhorar sua forma de argumentar, além de suprir aquelas lacunas que por vezes o professor fala de forma verbal, ou por vezes ele subtende que o discente já entendeu essa parte e não fala em sala de aula.*

As soluções, desse modo, puderam explicitar e ratificar os processos conceituais apresentados nas simulações e dicas, de modo que os estudantes pudessem perceber as suas funções durante a construção de um ou mais planos de solução. Além disso, o estudante pode comparar a sua solução com a do CombInter, observando as estratégias tomadas, bem como tendo acesso a mais de uma forma de solucionar o problema. Evidencia-se, assim, a importância de disponibilizar uma solução em que são expostas justificativas para as decisões apresentadas, bem como a forma de organizá-las em uma resolução bem-sucedida (Fernandes, 1989). Em

uma perspectiva de perceber a aplicação de estratégias de solução parecidas com o problema visto, o CombInter oportunizou aos estudantes um problema parecido, identificado como *Veja mais*. Ao interagirem com a funcionalidade, destacaram:

Estudante 3: *Quando o CombInter traz um problema parecido para resolver, faz com que o aluno tenha outra lógica para resolver o problema, ou que ele reforce a lógica que ele usou anteriormente. Então, expande os horizontes do aluno e reforça os conhecimentos que ele já tem.*

Estudante 4: *Essa inundação de restrições fazia a gente mudar um pouco a forma de resolução. E, às vezes, a gente fazia um erro na questão normal, mas que achava que tinha dado certo e, quando ia para a auxiliar, esse erro era bem evidente. Aí, a gente aprendia a mudar esse erro para não acontecer novamente.*

Estudante 5: *Apesar de ser parecido, ele sempre tinha um complemento que desafiava e aumentava o nível de complexidade. Aí, você vinha daquele problema que já tinha entendido a base e aumentava um pouco a dificuldade, fazendo com que o seu cérebro trabalhasse mais. Para mim, isso ajudava a fixar mais a solução específica daquele conteúdo.*

Estudante 10: *Às vezes, você acha que, ah, nesse tipo de questão, você só tem esse tipo de pergunta. Mas, quando você ia lá no Veja mais, você notava que podiam ser feitas diversas perguntas em cima daquilo. E, te ajudava a preparar para outras coisas que você fosse ver na vida, né?*

Nota-se que o *Veja mais* contribuiu para que o estudante tivesse um novo olhar acerca do problema principal, reavaliando suas estratégias anteriores – revisitando simulações, dicas e soluções – para que, após alguns ajustes, pudessem ser utilizadas em um novo problema. Contribuiu, também, para que o estudante tomasse a consciência de que um problema pode ser observado sob diversos aspectos e critérios, revelando diversos modos de pensar acerca do mesmo conceito. Consolida-se, assim, o conhecimento acerca do conceito, aprimora-se o repertório de estratégias para solucionar problemas e percebe-se que nenhum problema é um fim em si mesmo, podendo haver outros desdobramentos e diferentes formas de compreensão (Polya, 2006).

A interação conjunta entre as funcionalidades discutidas contribuiu para que os estudantes compreendessem alguns aspectos conceituais relacionados ao estudo de análise combinatória tidos como difíceis em estudos anteriores, conforme abordado anteriormente. Professor e estudantes argumentaram:

Estudante 2: *Porque visualizar o problema sendo executado, por exemplo, simulado, me ajudou a entender como que funcionava o arranjo.*

Estudante 2: *Em combinação e em permutação, por exemplo, eu consegui entender melhor o conceito dos dois vendo a solução.*

Estudante 10: *Às vezes, a depender do enunciado da questão, você fica na dúvida, quais casos de fato fazem parte da solução. Aí, com as dicas, você consegue ver. Ah, se tiver junto, por exemplo, se tiver repetição, nesse caso, não conta, essas coisas assim. A ordem importa, a ordem não importa. Ajudava a entender isso.*

Estudante 11: *A dica fazia com que a gente se tocasse ali de alguma coisa que a gente tinha perdido no meio da questão. Na hora de interpretar a questão, a gente achava que era uma coisa, mas era outra. E, na hora que a gente puxava na dica, aí, a gente dizia, não, não é bem esse o caminho. Vamos para outro. Aí, conseguia.*

Professor 1: *Eu destacaria principalmente as dicas 1 e 2, no sentido de pensar em casos particulares dos agrupamentos. Que é uma coisa que, inicialmente, entendo que, enquanto professor, os alunos não estão preocupados com isso. Estão querendo a resposta final e já pensar na ferramenta correta sem antes pensar como poder agrupar, e se esse agrupamento a ordem importa ou não importa.*

Superar as dificuldades típicas desse conteúdo se deu, de alguma maneira, pelo processo de engajamento causado pelo CombInter. Nesse processo, os entrevistados destacaram as formas de auxílios disponibilizadas pelo CombInter como instrumentos que forneceram segurança e autonomia para que os estudantes se mantivessem interessados em aprender. Nessa perspectiva, comentaram:

Estudante 1: *Ah, não consegui resolver, vou ter alguma ajuda [...] me prende ali, me incentiva a continuar tentando fazer. Então, conseqüentemente, eu consegui estudar mais e, tentar resolver, tentar focar mais naquilo, para tentar de fato resolver.*

Estudante 2: *É mais atrativo do que ir para qualquer site, onde você tem uma questão e um gabarito. Não tem muito de dizer assim, olha, tem esse jeito de raciocinar, como eu tinha nas dicas. Tem esse jeito de fazer, como eu tinha na simulação. Acho que o CombInter ganha muito nessa parte de ajudar o aluno a não desistir do problema.*

Estudante 9: *As dicas me ajudaram a persistir no problema e a não desistir até resolver.*

Estudante 10: *Ele te instigava a resolver. E, eu confesso que, às vezes, eu me sentia até desafiada a resolver quando eu estava com dificuldades. Não, essa aqui vou responder.*

Estudante 11: *O CombInter também instigava a gente a fazer mais questões. A gente ficava com vontade de, entre aspas, zerar o joguinho.*

Professor 1: *À medida que o aluno vai interagir com o sistema, seja tentando colocar a resposta certa, buscando as dicas, ou, principalmente, a simulação, engaja o aluno a continuar, uma vez que ele não está numa situação estática sem respostas.*

Os processos de reflexão proporcionados pelo CombInter contribuíram para que os estudantes manifestassem uma autonomia para saber lidar com os problemas combinatórios,

numa perspectiva de, ao estar diante de um problema novo, saber identificar os elementos-chave do enunciado, os possíveis invariantes conceituais envolvidos e suas relações com os dados. Sobre isso, comentaram os estudantes:

Estudante 4: *A simulação também ajudou muito na hora de fazer a prova que teve, que meio que, durante a prova, ficava fazendo algumas simulações na minha cabeça para conseguir compreender melhor as questões da prova.*

Estudante 4: *Depois a pessoa pega uma prática, entre aspas, que o CombInter proporciona, que deixa mais claro o que cada problema pede, mesmo sem você saber o assunto específico dele. Com o tempo, parei de precisar tanto de utilizar as dicas, porque eu já sabia mais ou menos o caminho que a questão pedia.*

Estudante 6: *Quando acertei a intermediária, eu não precisei das dicas, porque eu já tinha pensado.*

Estudante 9: *Quando comecei a entender o nível iniciante, que fui passando para os outros, eu percebi que eu estava conseguindo entender o que fazer para avançar.*

Estudante 10: *Se nas primeiras questões eu usava muitas dicas, nas outras você vai percebendo que você está usando menos, porque você conseguiu compreender melhor.*

Estudante 11: *Muitas vezes a gente ia na primeira questão, aí, via ali, lia, com a ajuda daquela dica, a gente já conseguia responder outras questões.*

Desse modo, podemos inferir que o CombInter, a partir da explicitação de processos mentais e propriedades do conceito relacionados ao estudo de análise combinatória incorporados nas simulações, dicas e soluções, principalmente, colaborou para um reconhecimento e desenvolvimento no estudante de suas habilidades metacognitivas (Belland; Kim; Hannafin, 2013; Fernandes, 1989). Isto é, contribuiu para que o estudante reflita sobre suas ações ao interpretar o problema, de modo que haja um processo de conscientização entre a sua forma de pensar e as propriedades conceituais envolvidas.

Aula de análise combinatória com o CombInter

Para os estudantes e o professor, a forma que a aula foi conduzida e planejada também contribuiu para a aprendizagem do conteúdo. A respeito da *aula expositiva* do professor, os sujeitos destacaram:

Estudante 3: *Achei ótimo, porque ele discorre os problemas de uma forma que você entenda cada detalhe do problema.*

Estudante 5: *E, a metodologia dele estava muito semelhante à do CombInter. Inicialmente, ele tentava explicar o que era e depois ele ensinava as fórmulas.*

Estudante 7: *O jeito que ele estava fazendo facilitou mais a compreensão, tanto do conteúdo em si de análise combinatória, quanto da compreensão da questão – o que a questão estava te pedindo. Ele pegava a questão, ele aplicava nela, destrinchava ela para aplicar o conceito.*

Estudante 8: *Acho que a turma teve muito mais momentos de discussão quando os exemplos foram apresentados primeiro e, depois, com a notação científica. Foi mais divertido assim. A gente, tipo, falava o nosso raciocínio em voz alta, a gente discutiu um pouco.*

Estudante 9: *É uma abordagem produtiva e interessante. É bem parecida também com a abordagem do CombInter”.*

Professor 1: *Tentar ser menos engessado e ser mais dinâmico na hora de apresentar as ferramentas da análise combinatória e, também, com relação à estruturação dos problemas, digo no sentido de convidar os alunos a pensar os casos particulares, a reduzir o problema para um caso mais simples. Então, de certa forma, se não reforçou, me convidou a fazer esse tipo de coisa durante as aulas. Acho que me influenciou nesse sentido durante as aulas.*

Evidencia-se que o professor planejou sua aula a partir da abordagem conceitual apresentada pelo CombInter. A reação dos estudantes também foi positiva, elencando peculiaridades, tais como: o nível de detalhe abordado pelo professor, a discussão de exemplos evidenciando os principais invariantes do conceito, e questionamentos que proporcionavam discussões entre alunos e o professor. Além da aula expositiva, os estudantes abordaram suas impressões sobre a *dinâmica de atividades para casa* propostas pelo professor:

Estudante 5: *No meu caso, geralmente, quando vou para algum sistema, sempre ignoro a parte teórica. E, o fato do professor estar toda semana solicitando um resumo, fazia com que eu fosse ler e, em várias situações, eu realmente compreendia mais. O CombInter foi uma ferramenta essencial para eu ir complementando o meu conhecimento e aprendendo. Não chegar só na última semana e enlouquecer com vários conceitos.*

Estudante 9: *Foi uma coisa que me ajudou bastante. Me ajudou a lembrar do conceito do conteúdo, me ajudou a fixar melhor o assunto. Gosto muito dessa abordagem.*

Estudante 10: *Acho que engajou mais. De certa forma, a gente já conseguia compreender melhor o que era. Aí, quando chegava na aula, era só mais para aprofundar o conceito. De modo geral, ajudou mais para aprender.*

Estudante 11: *Com a ajuda do material que já estava no CombInter, e com a pesquisa que eu fazia para fazer o mapa mental, me ajudava a responder às questões. Quando eu chegava na aula dele, já estava com a noção do que ele ia falar, e aquilo já ajudava a compreender mais o que o professor estava falando lá na frente.*

A partir das falas, nota-se que a dinâmica foi bem recebida pelos estudantes e, de certo modo, propiciou uma maior compreensão dos conceitos e um maior engajamento durante as aulas. A conjugação da dinâmica de aula proposta pelo professor e das peculiaridades do

CombInter apontadas anteriormente resultou em algumas mudanças comportamentais dos estudantes, a saber: formação de grupos de estudos de forma espontânea, motivação para o estudo individualizado independente, maior participação da aula e aumento de questionamentos de ordem superior ao professor. Abaixo, algumas falas que retrataram a *formação de grupos de estudos e o estudo independente*:

Estudante 1: *Nesse básico, intermediário e avançado, por estar ali, em sequência, já facilitava mais porque, ah, eu fiz as questões de nível básico que o professor passou. Ah, mas eu consegui compreender, beleza, vou tentar fazer um intermediário para ver se o meu entendimento consegue ser além do nível básico que consegui, por exemplo.*

Estudante 6: *Ter o aplicativo toda hora para você compartilhar respostas na sala. A gente tentar todo mundo junto quando não conseguia. A quantidade de suporte que ele tem. Você não ficava desesperançoso que vai errar ali e não vai conseguir, tipo, achar o raciocínio correto. No CombInter, eu gastava, entre aspas, o tempo, mas eu conseguia entender. Eu saía sabendo.*

Estudante 7: *Eu podia estar fora de casa e dizer, não, espera aí, vamos responder algumas coisas e chegar lá e acessar; eu podia estar aqui mesmo [na escola] respondendo algumas coisas.*

Estudante 8: *Eu e os meus amigos, a gente se juntava em grupinho e começava a discussão.*

Estudante 11: *Eu sempre respondia às questões mais em grupo com o pessoal. A gente se juntava numa salinha e ficava respondendo em grupo. Aí, a gente só entrava no CombInter e começava a responder às questões.*

Nota-se que o estudo independente, isto é, ir além das atividades solicitadas pelo professor, foi potencializado pela disponibilidade de auxílios e níveis gradativos de dificuldade das atividades. Em paralelo, devido ao sistema estar sempre disponível e promover constantes reflexões, a discussão em grupos foi estimulada, uma vez que, apesar do sistema disponibilizar diversos auxílios, o papel interpretativo foi fundamental no desenvolvimento de esquemas compatíveis com as atividades. Nesse processo, as discussões em grupos foram fundamentais para compreender como e porque determinados esquemas foram compatíveis ou não com determinados problemas combinatórios. Ainda sobre a questão comportamental, destacamos abaixo algumas falas que ressaltaram uma *maior participação dos estudantes* nas discussões em sala de aula, bem como um *aumento de questionamentos de ordem superior* acerca do conceito estudado:

Estudante 4: *A galera da sala estava mais engajada com a matemática.*

Estudante 11: *Percebi que os colegas participavam mais, porque a gente ficava engajado de participar ali. Muitos da turma, que não tinham muita disposição para estar estudando, ficaram com mais ânimo para estar prestando atenção na aula, não desfocar.*

Professor 1: *Vejo os alunos de forma bem participativa, bem presentes mesmo. Em alguns momentos, sentia que, em turmas passadas, estava dando aula para 5 ou 6 que de fato entendiam um pouco de combinatória. Mas, dessa vez, não. Eu senti que a maior parte estava entendendo e acompanhando, que estava querendo participar.*

Estudante 6: *Quando a gente chegava a perguntar para o professor, era uma coisa que a gente não tinha entendido de verdade, tipo, não eram coisinhas bestas que iam pegar o tempo dele.*

Estudante 8: *A maioria das dúvidas que eu tinha eram sanadas pelo CombInter. Eu não precisava perguntar para o professor. As dúvidas que ficavam eram mais complexas mesmo.*

Estudante 9: *O CombInter me estimulou a pensar uma coisa além das dúvidas que eu tinha. Geralmente, eu perguntava outras coisas, porque o sistema ele já me dava esse caminho mais básico.*

Estudante 11: *Eu senti que diminuiu a quantidade de vezes que a gente ficava chamando o professor para explicar. A gente teve mais dúvidas nas avançadas, por serem avançadas.*

Professor 1: *Notei questionamentos mais cirúrgicos, no sentido de ajudar a desenvolver novos problemas. Eram questionamentos que tinham mais a ver com o conteúdo, não estão muito voadores assim. São perguntas mais pertinentes do que uma pergunta de alguém que não entendeu absolutamente nada. Não é uma situação de “ah, professor, não entendi”. Não entendeu o quê? Tudo? Perguntas com mais qualidade.*

Nota-se que a participação dos estudantes se deu de forma ampla, seja de estudantes que tinham uma afinidade em matemática, seja de estudantes que tinham dificuldades, conforme as falas dos estudantes 4 e 11, e do professor 1. De certo modo, a aula com o CombInter proporcionou uma democratização do saber matemático envolvido, uma vez que tal conhecimento não ficou restrito a poucos estudantes. Além da participação no sentido mais colaborativo, percebeu-se que os estudantes passaram a fazer questionamentos ao professor com maior significado – com nuances conceituais mais elaboradas–, uma vez que, o CombInter permitia sanar incompreensões relacionadas ao conceito, bem como à interpretação dos problemas, principalmente em atividades de níveis iniciante e intermediário. Não apenas no comportamento do estudante em sala de aula que o professor percebeu mudanças. A partir das avaliações do bimestre, o professor pode perceber:

Professor 1: *Percebi que eles estavam tentando escrever com mais riqueza de detalhes. Melhoraram muito a forma da escrita, muito claras, tentaram se aproximar do CombInter também. A impressão que tenho é de amadurecimento. A maior parte tentou escrever com as suas palavras, colocando suas ideias.*

Professor 1: *Os alunos escreveram as ideias, não ficaram presos apenas a uma resposta. Colocaram, inclusive, nas provas, casos particulares para mostrar que entenderam de fato o problema. Também na clareza das ideias, digo no sentido da avaliação, eu consegui perceber onde é que eles estavam errando, de maneira mais clara, consegui entender o raciocínio deles, o que faltou para eles completarem o raciocínio e darem a resposta correta da questão. Também consegui comparar a questão da interação deles no sistema e o quanto que eles conseguiram desenvolver na prova. Por exemplo, alunos que interagiram mais com o sistema, eu consegui perceber que esses alunos foram muito mais claros nas suas ideias. Eles foram bem também na prova.*

Professor 1: *Achei que melhorou principalmente as dos que tinham mais dificuldade. Acho que o sistema atendeu muito a quem tinha mais dificuldade. Acho que pouquíssimos alunos ficaram abaixo de 50% da prova. Um ou dois.*

Professor 1: *Com o CombInter, a análise combinatória foi mais bem vista pelos alunos. Diria que saiu mais do campo abstrato e foi colocada de forma mais concreta.*

A forma de expor a solução dos problemas foi algo que chamou a atenção do professor. As soluções, que antes eram marcadas apenas pela presença do cálculo numérico⁷, passaram a trazer todo um processo construtivo, evidenciando os invariantes dos conceitos compatíveis com o enunciado do problema, justificando as operações realizadas, isto é, passou-se a priorizar uma caracterização do cálculo relacional⁸. Tal perspectiva permitiu que a maioria da turma conseguisse atingir acima de 50% de acertos da avaliação⁹, com destaque, principalmente, para estudantes que tinham maior dificuldade no assunto. Outros aspectos também chamaram a atenção do professor ao conduzir a aula com o CombInter:

Professor 1: *De otimização do trabalho e de uma melhor interação. Acho que, sobretudo, a interação entre professor e aluno, e sentir que o aluno está entendendo de fato o que estou falando. Eu me senti aliviado. A comunicação estava chegando de alguma forma.*

Professor 1: *Achei que eles estavam mais presentes na aula. Acho que os grupos estavam se ajudando mais, principalmente em relação ao sistema, de forma colaborativa.*

Professor 1: *Conduzir o aluno para uma aprendizagem mais autônoma. E, essa autonomia também se traduzir em sala de aula, no sentido da participação, da busca, das dúvidas, de deixar o aluno mais confiante.*

Fica claro que a percepção docente de que os estudantes estão engajados durante as aulas e as atividades, principalmente no sentido de demonstrar que estão aprendendo, é

⁷ O cálculo numérico envolve operações de adição, subtração, multiplicação ou divisão (Pessoa, 2002).

⁸ O cálculo relacional envolve operações de pensamento necessárias para compreender os relacionamentos envolvidos nas operações que podem solucionar um problema (Pessoa, 2002).

⁹ Em aulas anteriores de combinatória, o professor destacou que a maioria tirava notas baixas, com muitas notas zero.

relevante para sua prática profissional. Nesse aspecto, o CombInter pode contribuir de forma efetiva, conforme discussões anteriores, para uma aprendizagem com maior autonomia a partir de uma diversidade de ações reflexivas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir das discussões trazidas a respeito do uso do CombInter em sala de aula, nota-se que as características relacionadas ao saber matemático abordadas nas funcionalidades do *software* foram fundamentais para que o professor e os estudantes pudessem reconhecer o seu potencial em auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de análise combinatória. Ou seja, percebe-se que cada funcionalidade do CombInter se relaciona com alguma necessidade específica para o ensino e aprendizagem de combinatória.

Observa-se também que a relação que o professor estabelece com os estudantes a partir da inserção do objeto de aprendizagem em sua aula interfere sobremaneira nas percepções dos estudantes e do professor acerca do potencial pedagógico do OA. Desse modo, a abordagem de aula planejada considerando as peculiaridades do objeto de aprendizagem e sua condução são condições necessárias para que o OA seja explorado em todo o seu potencial.

A partir deste estudo, constatou-se que o CombInter traz funcionalidades relacionadas aos conceitos estudados importantes para aprendizagem do conteúdo, tais como: a forma de abordagem dos conceitos, situações-problema e soluções, dicas, simulações e relatórios de aprendizagem. Além das funcionalidades, foi destacado que a abordagem e a condução da aula com o CombInter contribuíram para a formação de grupos de estudos, o estudo independente, uma maior participação dos estudantes e o aumento de questionamentos de ordem superior.

O presente trabalho tem suas limitações, o que abre espaço para novas investigações, tais como: realizar novas avaliações do CombInter em sala de aula de Matemática, com maior tempo, quantitativo maior de professores e diferentes sistemas de ensino.

Acreditamos que objetos de aprendizagem condizentes com as características do saber envolvido e as reais necessidades de estudantes e professores, tais como o CombInter, potencializam as chances de aprendizagem, contribuindo para que o saber matemático seja maior difundido, em especial, entre os sujeitos que possuem maiores dificuldades de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

- ANTONIDES, Joseph; BATTISTA, Michael T. A learning trajectory for enumerating permutations: applying and elaborating a theory of levels of abstraction. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 68, 101010. 2022. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312322000785>.
- ARAÚJO, Gerliane Rocha; SANTOS, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão. Materiais manipuláveis: recurso para a resolução de problemas de produto cartesiano por uma aluna com deficiência visual. **Educação Matemática em Revista - RS**, v. 2, n. 20, p. 157-162. Disponível em: <https://www.sbemrasil.org.br/periodicos/index.php/EMR-RS/article/view/2035/1467>.
- ASSIS, Adryanne Barreto; PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos. Os três porquinhos e o lobo mal: literatura infantil e o ensino de combinatória. **Revista Educação Online**, v. 13, n. 28, p. 60-82. 2018. Disponível em: <https://educacaoonline.edu.puc-rio.br/index.php/eduonline/article/view/435>.
- BASTOS, Antonio Carlos; LOPES, Jurema Rosa; VICTER, Eline das Flores. Reflexões acerca do ensino da análise combinatória no ensino médio. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 11, n. 3, p. 330-344. 2020. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirosul.edu.br/rencima/article/view/2491>.
- BATISTA, Manassés da Silva. **Princípio fundamental da contagem e modelagem matemática nos anos finais do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, RS. 2020. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/220402>.
- BELLAND, Brian. R.; KIM, ChanMin.; HANNAFIN, Michael. J. A Framework for Designing Scaffolds That Improve Motivation and Cognition. **Educational Psychologist**, v. 48, n. 4, p. 243-270. 2013. Disponível em: <https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC3827669/>.
- BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Crianças de Anos Iniciais Levantando Espaços Amostrais: Relações Entre Pensamentos Combinatório e Probabilístico. **JIEEM**, v. 10, n. 2, p. 86-92. 2017. Disponível em: <https://jiejem.pgsscogna.com.br/jiejem/article/view/5506>.
- BRAGA, Juliana; PIMENTEL, Edson; DOTTA, Silvia. Processos e Metodologias para o Desenvolvimento de Objetos de Aprendizagem. In: BRAGA, Juliana. (Org.). **Objetos de aprendizagem: metodologia de desenvolvimento**. 2v. Santo André: UFABC. 2015. Disponível em: <https://pesquisa.ufabc.edu.br/intera/wp-content/uploads/2015/12/objetos-de-aprendizagem-v2.pdf>.

BRASIL. Ministério da Educação. Diretoria de Avaliação da Educação Básica. Sistema de Avaliação da Educação Básica. Brasília, DF, 2022.

BRITO, Celso Eduardo; ALMEIDA, Lucas Martins. A Utilização da Gamificação na Aprendizagem de Análise Combinatória: possibilidades atreladas ao uso do H5P e do Wordwall. **Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática**, v. 6, n. 1, p. 1-25. 2022. Disponível em: <https://periodicos.ufjf.br/index.php/ridema/article/view/38185>.

CARNEIRO, Sonny Odine. **A metacognição associada a aprendizagem significativa**: estudo envolvendo o conteúdo de análise combinatória. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa, PR. 2019.

COELHO, Levy de Oliveira; DIAS, Mônica Souto da Silva. Contribuições da metodologia análise de erro para o ensino e aprendizagem da análise combinatória no ensino médio. **Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 13, n. 2, p. 223-249. 2022. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/index.php/emteia/article/view/253725>.

D'AMBRÓSIO, Beatriz Silva.; D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Formação de professores de matemática: professor-pesquisador. **Atos de pesquisa em educação – PPGE/ME FURB**, v. 1, n. 1, p. 75-85, 2006. Disponível em: <https://ojsrevista.furb.br/ojs/index.php/atosdepesquisa/article/view/65/33>.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus. 2003. p. 11-33.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297. 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>.

FERNANDES, Domingos. Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de matemática. **Educação e Matemática**, n. 8, p. 3-6, 1989. Disponível em: <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/126/119>.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação em Matemática**: Percursos Teóricos e Metodológicos. 3. ed. Campinas, SP: Autores associados. 2009.

GADELHA, Dacymere da Silva; BORBA, Rute; MONTENEGRO, Juliana Azevedo. SOFTWARE PIXTON©: uma proposta de recurso para a ilustração de possibilidades combinatórias. **Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 12, n. 3, p. 1-18. 2021. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/250198>.

GEORGIEV, Ivan; ANDREEV, Ivo. Methodical scheme for introduction of combinatorial compounds in mathematics education. **TEM Journal**, v. 10, n. 1, p. 414-420. 2021.

Disponível em:

https://www.temjournal.com/content/101/TEMJournalFebruary2021_414_420.pdf.

JACOBY, Keli. **O ensino de análise combinatória pautado na aprendizagem, nos trabalhos em grupo e na comunicação matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, SC. 2019. Disponível em: <https://rd.uffs.edu.br/handle/prefix/3315>.

LIMA, Ewellen Tenorio; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Relações entre o raciocínio combinatório e o raciocínio probabilístico na EJA. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 7, n. 13, p. 33-60. 2018. Disponível em: <https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/6104>.

LOCKWOOD, Elise; DE CHENNE, Adaline. Reinforcing key combinatorial ideas in a computational setting: a case of encoding outcomes in computer programming. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 62, 100857. 2021. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312321000183>.

LÓS, Dayvid Evandro da Silva; CRISTINE, Martins Gomes de Gusmão. O ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória: uma Revisão Sistemática da Literatura. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 14, n. 33, p. 01–24, 2025.

MARTINS, Gécica Gonçalves. **Ensino de análise combinatória: um estudo das representações de professores de matemática do ensino médio público de São Mateus**. Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica) – Universidade Federal do Espírito Santo. São Mateus, ES. 2018. Disponível em: <https://repositorio.ufes.br/items/cf79cac9-f62f-41fe-a2ef-8bc57c4a4c4d>.

MARTINS, Glauce Vilela; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Do prescrito ao apresentado: a combinatória nos currículos de anos iniciais da EJA. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 36, p. 1-22. 2021. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/12324>.

MONTENEGRO, Juliana Azevedo. **Identificação, conversão e tratamento de registros de representações semióticas auxiliando a aprendizagem de situações combinatórias**. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, PE. 2018. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/32446>.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, João Bosco Pitombeira; Carvalho, Paulo Cezar Pinto; Fernandez, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

NUNES, Célia Barros; VIDAL, Thaylan Campeche. Resolução e formulação de problemas no desenvolvimento do raciocínio combinatório. **Com a palavra o professor**, v. 2, n. 4, p. 80-104. 2017. Disponível em: <http://revista.geem.mat.br/index.php/PPP/article/view/237>.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: Interciência. 2006.

SANTOS, Emily de Vasconcelos. **Contribuições da resolução, exploração e proposição de problemas ao processo de ensino e aprendizagem da combinatória nos anos iniciais do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande, PB. 2019. Disponível em: <https://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/3410>.

SEMANIŠINOVÁ, Ingrid. Multiple-solution tasks in pre-service teachers course on combinatorics. **Mathematics**, v. 9, n. 18, 2286. 2021. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2227-7390/9/18/2286>.

SILVA, José Roberto; RUFINO, Maria Aparecida Silva; SILVA, Cristiane Cavalcante; SILVA, Eriverton José. Os obstáculos epistemológicos e didáticos na combinatória: uma análise sobre a compreensão dos professores da educação básica. *In: XIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Anais... XIII ENEM*. Cuiabá, MT. 2019. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/noticias/881-anais-xiii-enem>.

SOTO, Osvaldo; SIY, Kris; HAREL, Guershon. Promoting a set-oriented way of thinking in a U.S. High School discrete mathematics class: a case study. **ZDM - Mathematics Education**, v. 54, n. 4, p. 809-827. 2022. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-022-01337-7>.

SUN, Chuen-Tsai; WANG, Dai-Yi; CHAN, Hui-Ling. How digital scaffolds in games direct problem-solving behaviors. **Computers & Education**, v. 57, n. 3, p. 2118-2125. 2011. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S036013151100128X>.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *In: Análise Psicológica*. 1986. p. 75-90.

WILEY, David A. **Learning object design and sequencing theory**. Dissertação (Doutorado em Filosofia). Department of Instructional Psychology and Technology, faculty of Brigham Young University. 2000.